



UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE
ÉCOLE DOCTORALE JEAN-HENRI LAMBERT
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES,
INFORMATIQUE ET APPLICATIONS

THÈSE
pour obtenir le grade de
Docteur en Mathématiques

présentée par

Olivier ELCHINGER

FORMALITÉ LIÉE AUX ALGÈBRES
ENVELOPPANTES ET ÉTUDE DES ALGÈBRES
HOM-(CO)POISSON

Thèse dirigée par Martin BORDEMANN et Abdenacer MAKHLOUF
soutenue le 12 novembre 2012 devant le jury composé de :

M. Benjamin ENRIQUEZ	Université de Strasbourg	(Rapporteur)
M. Joakim ARNLIND	University of Linköping	(Rapporteur)
M. Camille LAURENT-GENGOUX	Université de Metz	(Examineur)
M. Martin SCHLICHENMAIER	Université de Luxembourg	
M. Martin BORDEMANN	Université de Haute Alsace	(Directeur)
M. Abdenacer MAKHLOUF	Université de Haute Alsace	(Directeur)
M. Augustin FRUCHARD	Université de Haute Alsace	(Membre invité)

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier dans ces lignes les différentes personnes m'ayant soutenu et encouragé durant ces trois années de thèse.

Tout d'abord mes parents, qui m'ont suivi toute ma scolarité jusque dans les études supérieures. Mon épouse, qui s'est investie pour moi dans diverses démarches administratives, trajets, et au quotidien ; et me signalait tous les progrès successifs faits par notre fils. Fabien ensuite, qui m'a fait part de l'opportunité d'une place en thèse sur Mulhouse. Takashi et Elodie, ainsi que Philippe, pour leur hospitalité lorsque j'avais besoin de retourner sur Strasbourg assister à des cours ou des conférences. Je remercie chaleureusement M^{me} Wurth pour sa disponibilité et son accueil à mon égard. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Celui qui m'a protégé sur la route plusieurs fois plus longue que prévue.

Je souhaite également remercier les membres du laboratoire de m'avoir bien accueilli parmi eux, pour les discussions, énigmes et réflexions menées lors des repas et poursuivies quelques fois plus avancé dans l'après-midi. Merci à Abdenour pour les récents échanges, partages et découvertes. Je remercie vivement M^{me} Fricker, pour la gestion et résolution d'innombrables détails administratifs, M^{me} Robert pour les échanges prompts avec l'école doctorale, ainsi que les personnes des ressources humaines pour leurs conseils.

Merci aussi à mes directeurs de thèse pour avoir cru en moi, m'avoir introduit dans leurs recherches, expliqué et ré-expliqué les points moins évidents, fait et refait des calculs gigantesques, envoyé suivre des conférences et des écoles d'été en diverses retraites et conseillé durant tout ces travaux. Merci de m'avoir offert à de nombreuses reprises le couvert et/ou le café.

Je tiens enfin à remercier les rapporteurs et membres du jury d'avoir accepté de prendre le temps de regarder mon travail, et de leurs remarques et critiques pour l'améliorer.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	v
INTRODUCTION GÉNÉRALE	ix
I FORMALITÉ ET STRUCTURES L_∞	1
1 PRÉLIMINAIRES	5
1.1 STRUCTURES GRADUÉES	6
1.1.1 Espaces et algèbres gradués	6
1.1.2 Espaces décalés	8
1.1.3 Bigèbre tensorielle	8
1.1.4 Bigèbre symétrique	14
1.1.5 Algèbres enveloppantes	18
1.2 COHOMOLOGIE ET DÉFORMATIONS	19
1.2.1 Cohomologie de Hochschild	19
1.2.2 Cohomologie de Chevalley-Eilenberg	19
1.2.3 Propriétés	20
1.2.4 Lien avec les déformations	21
2 FORMALITÉ DE KONTSEVICH	23
2.1 DÉFINITIONS	25
2.2 CAS DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES	26
2.2.1 Algèbres de Lie graduées différentielles	26
2.2.2 Sections	28
2.2.3 Formalité	28
2.2.4 Application à la déformation	32
2.3 CAS DES ALGÈBRES DE LIE	33
2.3.1 Champs de polyvecteurs et fonctions polynômiales	33
2.3.2 Structure de Poisson linéaire	34
2.3.3 Formalité	35
2.4 ALGÈBRES ENVELOPPANTES	37
2.5 LEMME DE PERTURBATION	38
2.5.1 Cohomologie à deux degrés	41
2.5.2 Résultat général	43

3	ÉTUDE DE LA FORMALITÉ POUR LES ALGÈBRES LIBRES	47
3.1	DESCRIPTION DES ESPACES	48
3.1.1	Définitions	48
3.1.2	Exemples en dimension 0 et 1	49
3.1.3	Résultats en dimension plus grande que 2	50
3.1.4	Cas d'un espace de dimension finie	57
3.2	FORMALITÉ PERTURBÉE	59
3.2.1	Calculs pour la partie cocycle dans le cas 1	59
3.2.2	Calculs pour la partie cocycle dans le cas 2	60
3.2.3	Calculs pour la partie cobord dans le cas 1	61
3.2.4	Calculs pour la partie cobord dans le cas 2	64
4	ÉTUDE DE LA FORMALITÉ POUR L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}(3)$	67
4.1	DESCRIPTION DE L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}(3)$	68
4.2	SOUS-ALGÈBRE DU COMPLEXE DE CHEVALLEY-EILENBERG	69
4.3	RÉTRACTE PAR DÉFORMATION DU COMPLEXE	72
4.4	CALCUL DE LA STRUCTURE L_∞	73
II STRUCTURES HOM-ALGÈBRIQUES		77
5	DÉFORMATION DES HOM-(CO)ALGÈBRES	81
5.1	ALGÈBRES HOM-ASSOCIATIVES ET HOM-LIE	82
5.1.1	Définitions	82
5.1.2	Exemples	84
5.1.3	Principe de twist	84
5.1.4	Construction d'algèbres Hom-Lie	85
5.2	HOM-COGÈBRES, HOM-BIGÈBRES ET ALGÈBRES HOM-HOPF	89
5.2.1	Hom-cogèbres et dualité	89
5.2.2	Hom-bigèbre et algèbre Hom-Hopf	93
5.3	COGÈBRES ET BIGÈBRES HOM-LIE	94
6	STRUCTURES HOM-(CO)POISSON	99
6.1	ALGÈBRE HOM-POISSON	100
6.1.1	Définitions et exemples	100
6.1.2	Principe de twist	101
6.1.3	Application à l'algèbre de Sklyanin	101
6.1.4	Construction d'algèbres Hom-Poisson à partir d'algèbres Hom-Lie	102
6.2	STRUCTURES À UNE SEULE OPÉRATION BINAIRE	104
6.2.1	Hom-algèbres flexibles	104
6.2.2	Lien avec les algèbres Hom-Poisson	105
6.3	ALGÈBRES HOM-COPOISSON ET DUALITÉ	107
6.3.1	Lien avec les bigèbres Hom-Lie	107

6.3.2	Dualité	110
7	DÉFORMATION ET QUANTIFICATION DE HOM-ALGÈ- BRES	113
7.1	HOM-DÉFORMATION FORMELLE	114
7.1.1	Déformation formelle d'algèbres Hom-associatives	114
7.1.2	Déformations de Hom-cogèbres et Hom-bigèbres	116
7.2	QUANTIFICATION ET TWISTS DE \star -PRODUITS	116
7.2.1	Twists du \star -produit de Moyal-Weyl	118
7.2.2	Twists du crochet de Poisson	120
7.2.3	Quantification des automorphismes de Poisson . .	122
A	CALCULS <i>Mathematica</i>	129
A.1	CALCUL DES MORPHISMES DE $\mathfrak{sl}(2)$	130
A.2	STRUCTURES HOM-LIE ASSOCIÉES AU CROCHET DE JACK- SON $\mathfrak{sl}(2)$	133
	BIBLIOGRAPHIE	137

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LE but de cette thèse est d'étudier quelques aspects de structures algébriques liées au problème de quantification par déformation. On considère d'une part la formalité dans le cas des algèbres libres et de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$, et on s'intéresse d'autre part à la quantification par déformation pour des structures Hom-algébriques. Ce qui suit relate l'historique de ces sujets, une exposition plus détaillée des résultats est donnée au début de chaque partie.

La théorie de déformation des structures est un moyen de formaliser la physique quantique. Si l'on dispose d'une description quantique d'un système physique, on obtient une description classique à l'échelle macroscopique en faisant « tendre la constante de Planck \hbar vers zéro ». Le problème inverse, qui consiste à établir une description quantique à partir d'un cadre classique, est appelé *quantification*. La structure considérée pour la mécanique classique est l'algèbre associative commutative des fonctions lisses sur une variété symplectique, ou plus généralement de Poisson. La quantification par déformation consiste à construire une multiplication associative non commutative (plus précisément un \star -produit) sur les séries formelles en \hbar à coefficients dans cette algèbre, qui encode le crochet de Poisson au premier ordre. La structure de Poisson est alors appelée limite quasi-classique et la déformation est le \star -produit. Ce point de vue initié dans [BFF⁺78] en 1978 essaye de considérer la mécanique quantique comme une déformation de la mécanique classique, le groupe de Poincaré comme une déformation du groupe de Galilée. Cet article fondateur soulève la question de l'existence et de l'unicité d'une déformation d'un crochet de Poisson sur une variété quelconque.

Les premiers résultats ont porté sur les variétés symplectiques. Le cas général des variétés de Poisson a été résolu par Kontsevich en 1997 dans [Kon03]. Il l'a déduit en démontrant un résultat

tat beaucoup plus général, qu'il a appelé « conjecture de formalité ». Le complexe de Hochschild de l'algèbre des fonctions lisses d'une variété de Poisson, muni du crochet de Gerstenhaber, admet une structure d'algèbre de Lie graduée par décalage, qui contrôle les déformations du crochet de Poisson. Kontsevich montre que ce complexe est relié à sa cohomologie — qui contrôle ainsi les mêmes déformations — par un quasi-isomorphisme L_∞ , dit application de formalité. Ceci ramène le problème de la déformation au cas déjà résolu.

Kontsevich a montré en particulier que le critère de formalité est valide pour les algèbres symétriques sur un espace vectoriel de dimension finie. Bordemann et Makhlouf ont considéré dans [BM08] une légère généralisation aux algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie. Ils ont explicité le fait — transparaissant chez Kontsevich — que la formalité pour une algèbre de Lie est équivalente à celle pour son algèbre enveloppante. Ils ont aussi montré qu'il y a formalité pour les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie affines. Ces méthodes utilisées dans [BMP05] permettent aussi d'obtenir des informations sur la rigidité des algèbres enveloppantes.

On se propose dans la première partie de cette thèse d'étudier la question de la formalité pour quelques classes d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie. On considère les algèbres libres, qui sont un cas particulier d'algèbres enveloppantes, et on montre qu'il n'y a pas formalité en général, sauf dans les cas triviaux. L'étude de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ montre que dans ce cas aussi, il n'y a pas formalité.

Les techniques utilisées sont de type homologiques. On rappelle que la cohomologie est concentrée en degrés 0 et 1 pour les algèbres libres, et en degrés 0 et 3 pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$. On procède ensuite à la construction du quasi-isomorphisme L_∞ entre l'algèbre de Lie différentielle graduée des cochaînes de Hochschild munie du crochet de Gerstenhaber et la cohomologie munie du crochet de Schouten.

Pour réaliser cette dernière, on utilise une version du *Lemme de perturbation* adapté aux algèbres de Lie différentielles graduées, qui, étant données une contraction entre deux complexes différentiels gradués et une perturbation de l'une des différentielles, permet d'obtenir une nouvelle contraction entre les deux complexes munis des différentielles perturbées.

L'étude des quasi-déformations des algèbres de Lie de champs de vecteurs, en particulier les q -déformations des algèbres de Witt et de Virasoro, a mené à l'introduction de nouvelles structures

non-associatives. Les algèbres Hom-Lie ont été introduites par Hartwig, Larsson et Silvestrov pour décrire ces q -déformations à l'aide de σ -dérivations (voir [HLS06]). Ils obtiennent une description des q -déformations de l'algèbre de Witt par une famille à un paramètre q d'algèbres Hom-Lie, de sorte que l'algèbre de Witt initiale est obtenue pour $q = 1$. Le type d'objet associatif correspondant aux algèbres Hom-Lie, appelé algèbre Hom-associative, a été introduit par Makhlouf et Silvestrov dans [MS10b]. Les algèbres enveloppantes des algèbres Hom-Lie ont été étudiées par D. Yau dans [Yau08]. Les notions duales de Hom-cogèbres, ainsi que les notions de Hom-bigèbres, algèbres Hom-Hopf et Hom-Lie cogèbres ont été d'abord étudiées dans [SPAS09, MS10a] et ont été approfondies dans [Yau11, Yau10a].

La théorie de déformation formelle est étendue dans [MS10b] aux algèbres Hom-associatives et Hom-Lie. La théorie pour les bigèbres et les algèbres de Hopf a été introduite dans [GS92], elle a été étendue aux Hom-cogèbres, Hom-bigèbres et algèbres Hom-Hopf dans [DM]. Des complexes de cohomologie adéquats ont été construits pour ces différentes structures algébriques et les liens entre la cohomologie et les déformations formelles ont été établis.

Le problème de quantification par déformation dans le cadre des Hom-algèbres peut s'énoncer de la manière suivante : pour une algèbre Hom-(co)Poisson donnée, il s'agit de trouver une déformation d'une (co)algèbre commutative Hom-(co)associative telle que le premier terme de la déformation corresponde à l'algèbre Hom-(co)Poisson de départ.

La seconde partie de ce travail a été prépubliée en grande partie dans l'article [BEM12]. On y rappelle quelques propriétés de structures Hom-algébriques, on introduit la notion d'algèbre Hom-coPoisson et on étudie la dualité. On utilise un principe de déformation par twist pour construire de nouvelles structures de même type, ou encore pour déformer une structure classique en une Hom-structure correspondante à l'aide d'un morphisme d'algèbres. En particulier, on applique ce procédé aux structures de Poisson et aux \star -produits de Moyal-Weyl.

Par ailleurs, on établit une correspondance entre les algèbres enveloppantes d'algèbres Hom-Lie possédant une structure Hom-coPoisson et les bigèbres Hom-Lie.

PREMIÈRE PARTIE

FORMALITÉ ET STRUCTURES L_∞

CONTENU DE LA PARTIE

1	PRÉLIMINAIRES	5
1.1	STRUCTURES GRADUÉES	6
1.2	COHOMOLOGIE ET DÉFORMATIONS	19
2	FORMALITÉ DE KONTSEVICH	23
2.1	DÉFINITIONS	25
2.2	CAS DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES	26
2.3	CAS DES ALGÈBRES DE LIE	33
2.4	ALGÈBRES ENVELOPPANTES	37
2.5	LEMME DE PERTURBATION	38
3	ÉTUDE DE LA FORMALITÉ POUR LES ALGÈBRES LIBRES	47
3.1	DESCRIPTION DES ESPACES	48
3.2	FORMALITÉ PERTURBÉE	59
4	ÉTUDE DE LA FORMALITÉ POUR L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}(3)$	67
4.1	DESCRIPTION DE L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}(3)$	68
4.2	SOUS-ALGÈBRE DU COMPLEXE DE CHEVALLEY-EILENBERG	69
4.3	RÉTRACTE PAR DÉFORMATION DU COMPLEXE	72
4.4	CALCUL DE LA STRUCTURE L_∞	73

INTRODUCTION DE LA PREMIÈRE PARTIE

DANS cette première partie, après présentation de structures graduées en Section 1.1 et rappels sur les notions de cohomologie en Section 1.2, on définit les notions d'algèbres L_∞ et de formalité (Définition 2.1.2 et Définition 2.1.3). Une algèbre L_∞ est une généralisation d'une algèbre de Lie graduée. C'est une certaine cogèbre symétrique cocommutative graduée différentielle, dont la différentielle encode un crochet de Lie et des applications d'arités supérieures. Le fait que la différentielle soit de carré nul par composition englobe l'identité de Jacobi à l'ordre deux et d'autres identités à tout ordre faisant intervenir ces applications.

Un morphisme L_∞ (Définition 2.1.2) est une application entre deux algèbres L_∞ qui entrelace les différentielles. En considérant les composantes du morphisme, ceci produit aussi des équations à tout ordre.

Pour une algèbre associative, on considère son complexe de Hochschild et sa cohomologie qui, munis du crochet de Gerstenhaber et du crochet de Schouten qu'il induit, sont des algèbres de Lie graduées par décalage. Elles peuvent être considérées comme des algèbres L_∞ , les différentielles étant induites par les crochets. Il n'y a pas en général de morphisme d'algèbre de Lie graduées injectant la cohomologie vers les cocycles, mais il se peut qu'il existe un morphisme d'algèbres L_∞ entrelaçant les différentielles induites par les crochets.

Une application de formalité est un tel morphisme, s'il induit un isomorphisme sur la cohomologie (un quasi-isomorphisme). Par contre, s'il n'existe pas d'application de formalité, il est toujours possible de modifier ordre par ordre la structure L_∞ de la cohomologie : la différentielle perturbée n'est alors plus induite par le crochet de Schouten seulement, mais contient des composantes d'arités supérieures. Cette construction se base sur une version du *Lemme de perturbation* (Lemme 2.5.4) adapté pour les algèbres de Lie différentielles graduées.

On étudie ensuite les équations de formalité pour les algèbres libres, et on montre dans la Section 3.2 qu'elles ne sont pas vérifiées. Le calcul de la structure L_∞ perturbée ne donne qu'un seul terme d'arité 3. On effectue le même travail pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Là encore, il n'y a pas formalité (Théorème 4.4.1), et la structure L_∞ perturbée est également composée d'un seul terme d'arité 3.

PRÉLIMINAIRES

SOMMAIRE

1.1	STRUCTURES GRADUÉES	6
1.1.1	Espaces et algèbres gradués	6
1.1.2	Espaces décalés	8
1.1.3	Bigèbre tensorielle	8
1.1.4	Bigèbre symétrique	14
1.1.5	Algèbres enveloppantes	18
1.2	COHOMOLOGIE ET DÉFORMATIONS	19
1.2.1	Cohomologie de Hochschild	19
1.2.2	Cohomologie de Chevalley-Eilenberg	19
1.2.3	Propriétés	20
1.2.4	Lien avec les déformations	21

POUR commencer, on présente le cadre de travail, qui est celui des espaces vectoriels gradués. La notion de décalage des composantes joue un rôle important et permet d'enrichir les structures considérées. On détaille ensuite quelques structures existantes sur des espaces tensoriels. Ce chapitre se termine par le rappel des notions de cohomologie de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg, ainsi que certaines de leurs propriétés.

1.1 STRUCTURES GRADUÉES

Une graduation sur un espace permet d'exposer de manière concise des propriétés valides en chaque degré. Les calculs sont aussi facilités en travaillant avec des éléments homogènes sur chaque composante. Dans ce qui suit, \mathbb{K} est un corps de caractéristique 0, sauf mention du contraire. Le livre [LV12] est une bonne référence exposant d'autres détails sur les structures présentés ci-après.

1.1.1 Espaces et algèbres gradués

On considère la *catégorie des espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués* : les objets sont les \mathbb{K} -espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$, somme directe de sous-espaces V^i . Un élément x de V appartenant à l'un des V^i est dit *homogène*, et l'on dénotera par $i =: |x| \in \mathbb{Z}$ son degré. Dans la suite, les éléments seront toujours considérés comme homogènes si rien d'autre n'est précisé. Pour deux espaces vectoriels gradués V et W , une application linéaire $\phi : V \rightarrow W$ est dite homogène de degré j si pour tout entier i , on a $\phi(V^i) \subset W^{i+j}$. Dans le cas gradué, on écrira $\text{Hom}(V, W)^j$ pour l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires homogènes de degré j , et $\text{Hom}(V, W)$ pour la somme directe de tous les $\text{Hom}(V, W)^j$. Ainsi, $\text{Hom}(V, W)$ est un espace vectoriel gradué.

De la même manière, le produit tensoriel $V \otimes W$ est gradué en posant $(V \otimes W)^i = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V^k \otimes W^{i-k}$, voir [ML63]. Le produit tensoriel de deux morphismes $\phi : V \rightarrow W$ et $\psi : V' \rightarrow W'$ est défini à l'aide de la *règle des signes de Koszul* : pour tous éléments homogènes $x \in V$ et $y \in V'$

$$(\phi \otimes \psi)(x \otimes y) := (-1)^{|\psi||x|} \phi(x) \otimes \psi(y), \quad (1.1.1)$$

avec ψ de degré $|\psi|$. On définit encore la *transposition graduée*

$$\begin{aligned} \tau : V \otimes W &\rightarrow W \otimes V \\ \tau(x \otimes y) &:= (-1)^{|x||y|} y \otimes x. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Ces deux règles déterminent tous les signes apparaissant dans les calculs.

Une *algèbre (associative) graduée* (\mathcal{A}, μ) est un espace vectoriel gradué \mathcal{A} muni d'un morphisme d'espaces gradués $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ de degré 0, *i.e.* vérifiant

$$\mathcal{A}^i \mathcal{A}^j \subset \mathcal{A}^{i+j}.$$

On écrira souvent aa' à la place de $\mu(a \otimes a')$. Pour une autre algèbre graduée (\mathcal{B}, ν) le produit tensoriel gradué de \mathcal{A} et \mathcal{B} est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ muni de l'application produit définie comme la composée $(\mu \otimes \nu) \circ (id \otimes \tau \otimes id)$. Pour des éléments homogènes $a, a' \in \mathcal{A}$ et $b, b' \in \mathcal{B}$ ce produit est donné par

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'.$$

Une algèbre graduée (\mathcal{A}, μ) est dite *commutative* si on a $\mu \circ \tau = \mu$, *anticommutative* si $\mu \circ \tau = -\mu$, ce qui s'écrit pour $a, b \in \mathcal{A}$

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba \quad \text{et} \quad ab = -(-1)^{|a||b|} ba.$$

Une *cogèbre graduée* (\mathcal{C}, Δ) se définit de manière similaire : la comultiplication doit vérifier

$$\Delta c^j \subset \sum_{k+l=j} c^k \otimes c^l.$$

Elle est dite *cocommutative* si $\tau \circ \Delta = \Delta$ et *anticocommutative* si $\tau \circ \Delta = -\Delta$. On définit une structure de cogèbre graduée sur le produit tensoriel de deux cogèbres graduées en appliquant la même règle sur les signes que dans le cas des algèbres.

Une *dérivation de degré i* dans une algèbre graduée (\mathcal{A}, μ) est un morphisme linéaire $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ de degré i tel que

$$d(ab) = da.b + (-1)^{|a|} a.db$$

ce qui s'écrit encore

$$d \circ \mu = \mu \circ (d \otimes id_{\mathcal{A}} + id_{\mathcal{A}} \otimes d).$$

Une *codérivation de degré i* dans une cogèbre graduée (\mathcal{C}, Δ) est un morphisme linéaire $d : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ de degré i tel que si on note $\Delta a = \sum_{(a)} a_1 \otimes a_2$, on ait

$$\Delta da = \sum_{(a)} da_1 \otimes a_2 + (-1)^{|a_1|} a_1 \otimes da_2$$

ou encore

$$\Delta \circ d = (d \otimes id_{\mathcal{C}} + id_{\mathcal{C}} \otimes d) \circ \Delta.$$

Définition 1.1.1 Une *algèbre de Lie graduée* est un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué V muni d'un crochet de Lie gradué, i.e. une application bilinéaire $[\ , \] : V \otimes V \rightarrow V$ telle que

graduation $[V^i, V^j] \subset V^{i+j}$
et pour $x, y, z \in V$

antisymétrie graduée

$$[y, x] = -(-1)^{|y||x|}[x, y] \quad (1.1.3)$$

identité de Jacobi graduée

$$(-1)^{|x||z|}[[x, y], z] + (-1)^{|y||x|}[[y, z], x] + (-1)^{|z||y|}[[z, x], y] = 0 \quad (1.1.4)$$

ou encore

$$\bigcirc_{x,y,z} (-1)^{|x||z|}[[x, y], z] = 0,$$

où $\bigcirc_{x,y,z}$ indique une sommation sur les permutations cycliques de x, y, z .

1.1.2 Espaces décalés

Pour un entier j , on dénote par $V[j]$ l'espace vectoriel gradué décalé défini par $V[j]^i := V^{i+j}$. L'application identique $V \rightarrow V$ induit pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ une application $s^n : V[j] \rightarrow V[j-n]$, de degré n car $s^n(V[j]^k) = V^{j+k} = V[j-n]^{k+n}$, vue comme la puissance n -ième de la suspension $s := s^1 : V[j] \rightarrow V[j-1]$ de degré un.

En particulier, $s : V[1] \rightarrow V = V[0]$ et si un élément $x \in V[1]$ est de degré $|x|$ (dans $V[1]$), alors $x = sx$ est de degré $|sx| = |x| + 1$ dans V .

La suspension sera « visible » pour des applications multilinéaires décalées : soit $\phi : V^{\otimes k} \rightarrow W^{\otimes l}$ une application multilinéaire de degré $|\phi|$. L'application décalée $\phi[j] : V[j]^{\otimes k} \rightarrow W[j]^{\otimes l}$ est définie en posant $\phi[j] := (s^{\otimes l})^{-j} \circ \phi \circ (s^{\otimes k})^j$. Le degré de l'application décalée $\phi[j]$ est donné par $|\phi[j]| = j(k-l) + |\phi|$ et l'on a $(\phi[j])[j'] = \phi[j+j']$. On remarque que $(s^{\otimes k})^j = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2}} (s^j)^{\otimes k}$. Pour calculer la décalée d'une application, on commence par écrire, pour $\xi := x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in V^{\otimes k}$, la valeur de $\phi(\xi)$ avec la notation de Sweedler comme étant $\sum \phi_{(1)}(\xi) \otimes \cdots \otimes \phi_{(l)}$, avec $\phi_{(i)} \in W$. Par la règle des signes de Koszul (1.1.1), la valeur de l'application décalée $\phi[j]$ sur $\eta := y_1 \otimes \cdots \otimes y_k \in V[j]^{\otimes k}$ est calculée comme suit, avec $\tilde{\eta} := s^j(y_1) \otimes \cdots \otimes s^j(y_k)$:

$$\begin{aligned} \phi[j](y_1 \otimes \cdots \otimes y_k) &= \\ & (-1)^{\frac{k(k-1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2}} (-1)^j \left((k-1)|y_1| + (k-2)|y_2| + \cdots + (k-(k-1))|y_k| \right) \\ & \sum (-1)^j \left((l-1)|\phi_{(1)}(\tilde{\eta})| + (l-2)|\phi_{(2)}(\tilde{\eta})| + \cdots + (l-(l-1))|\phi_{(l)}(\tilde{\eta})| \right) \\ & \phi_{(1)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_k) \otimes \cdots \otimes \phi_{(l)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_k). \end{aligned}$$

1.1.3 Bigèbre tensorielle

Pour un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradués V , on dénote par $\mathcal{T}V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V^{\otimes k}$ l'algèbre tensorielle engendrée par V . C'est une algèbre graduée

\mathbb{K} -associative avec unité $\mathbf{1}$, la \mathbb{Z} -graduation provient de la \mathbb{Z} -graduation de V , voir [ML63]. Pour éviter les confusions, le symbole \otimes n'est pas écrit dans la multiplication libre $\mu = \mu_{\mathcal{T}V}$ de $\mathcal{T}V$, donnée par juxtaposition.

De plus, $\mathcal{T}V$ est une bigèbre graduée : soit $\mathcal{T}V^+ = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} V^{\otimes k}$ l'idéal d'augmentation. La counité $\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{T}V} : \mathcal{T}V \rightarrow \mathbb{K}$ est définie par la condition $\text{Ker } \varepsilon = \mathcal{T}V^+$ et $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1_{\mathbb{K}}$. La *comultiplication shuffle* graduée Δ_{sh} est le morphisme d'algèbres associatives $\mathcal{T}V \rightarrow \mathcal{T}V \otimes \mathcal{T}V$ induit (par propriété universelle Théorème 1.1.2) par sa valeur $\Delta_{sh}(x) = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x$ sur les générateurs $x \in V$.

Comme la multiplication $\mu^{[2]}$ sur $\mathcal{T}V \otimes \mathcal{T}V$ est donnée par $(\mu \otimes \mu) \circ (id \otimes \tau \otimes id)$ avec la transposition graduée, il y a des signes dans les formules contenant Δ_{sh} , par exemple $\Delta_{sh}(xy) = xy \otimes \mathbf{1} + x \otimes y + (-1)^{|x||y|} y \otimes x + \mathbf{1} \otimes xy$, avec $x \in V^{|x|}$ et $y \in V^{|y|}$. Cette comultiplication est cocommutative graduée (*i.e.* $\tau \circ \Delta_{sh} = \Delta_{sh}$) de degré 0.

Dualisant cette structure de bigèbre, on obtient sur l'espace $\mathcal{T}V$ une autre structure de bigèbre, où la comultiplication (non cocommutative graduée) de *déconcaténation*, $\Delta = \Delta_{\mathcal{T}V}$, dualise la multiplication libre et est donnée par $\Delta(x_1 \cdots x_k) = \mathbf{1} \otimes x_1 \cdots x_k + \sum_{r=2}^k x_1 \cdots x_{r-1} \otimes x_r \cdots x_k + x_1 \cdots x_k \otimes \mathbf{1}$; et la *multiplication shuffle* μ_{sh} commutative graduée, parfois notée \bullet , dualise la comultiplication shuffle. Pour une formule explicite de μ_{sh} , voir l'équation (1.1.9). Les deux opérations Δ et μ_{sh} sont de degré 0, l'unité est encore $\mathbf{1}$ et la counité ε . On note pr_V la projection canonique sur $\mathcal{T}V^1$.

Pour deux applications linéaires ψ_1, ψ_2 allant d'une cogèbre coassociative graduée (C, Δ_C) vers une algèbre associative graduée (A, μ_A) , la convolution $\psi_1 \star \psi_2$ de ψ_1 et ψ_2 par rapport à μ_A et Δ_C est donnée par $\psi_1 \star \psi_2 := \mu_A \circ (\psi_1 \otimes \psi_2) \circ \Delta_C$. C'est une multiplication associative dans $\text{Hom}(C, A)$.

L'algèbre tensorielle $(\mathcal{T}V, \mu = \mu_{\mathcal{T}V}, \mathbf{1})$ est *libre*¹ dans le sens qu'elle est caractérisée à isomorphisme près par la propriété universelle suivante.

Théorème 1.1.2 *Soit (A, μ_A) une algèbre associative graduée. Tout morphisme $\phi : V \rightarrow A$ d'espaces vectoriels gradués, de degré zéro, s'étend de manière unique en un morphisme $\bar{\phi} : \mathcal{T}V \rightarrow A$ d'algèbres graduées.*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}V & \xrightarrow{\bar{\phi}} & (A, \mu_A) \\
 & \searrow & \nearrow \phi \\
 & V &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \bar{\phi} \text{ vérifie pour chaque } n \in \mathbb{N} \\
 \bar{\phi}(x_1 \cdots x_n) = \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \\
 \Leftrightarrow \bar{\phi} \circ \mu^{(n-1)} = \mu_A^{(n-1)} \circ (\phi \otimes \cdots \otimes \phi)
 \end{array}
 \tag{1.1.5}$$

Preuve. On donne dans cette preuve une construction un peu plus explicite que l'utilisation usuelle de la propriété universelle du

1. et ainsi souvent appelée algèbre libre

produit tensoriel. Soit $\phi^{\star n} = \mu_A^{(n-1)} \circ \phi^{\otimes n} \circ \Delta^{(n-1)}$, avec $\phi^{\star 0} = 1_A \varepsilon_{TV}$ et $\phi^{\star 1} = \phi$, et soit $\bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{\star n}$. En étendant ϕ par 0 sur $\bigoplus_{n \neq 1} V^{\otimes n}$, on a $\phi^{\otimes k+1} \Delta^{(k)}(x_1 \cdots x_n) = 0$ pour $k > n$, donc $\bar{\phi}$ est bien définie. Ainsi, dans la somme donnant $\bar{\phi}(x_1 \cdots x_n)$, le seul terme non nul est exactement $\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)$. Finalement $\bar{\phi}$ est uniquement déterminée par ϕ . \square

Le morphisme d'algèbre $\bar{\phi}$ induit par $\phi : V \rightarrow A$ est obtenu par $\bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{\star n}$, la série géométrique utilisant la convolution par rapport à la multiplication μ_A et la comultiplication de déconcaté-
nation Δ .

Proposition 1.1.3 *Soit $d : V \rightarrow A$ une application linéaire de degré $j \in \mathbb{Z}$. Il existe une unique dérivation graduée de degré j le long de $\bar{\phi}$, notée $\bar{d} : TV \rightarrow A$, i.e. $\bar{d} \circ \mu_A = \mu_A \circ (\bar{d} \otimes \bar{\phi} + \bar{\phi} \otimes \bar{d})$, telle que $\bar{d}|_V = d$.*

Preuve. Posons $\bar{d}(x) := d(x)$ pour $x \in V$, puis on étend par la formule $\bar{d}(xy) = \bar{d}(x)\bar{\phi}(y) + \bar{\phi}(x)\bar{d}(y)$. Comme elle respecte l'associativité de la multiplication libre de TV

$$\begin{aligned} \bar{d}(x(yz)) &= d(x)\bar{\phi}(yz) + \bar{\phi}(x)\bar{d}(yz) = d(x)\phi(y)\phi(z) + \phi(x)d(y)\phi(z) + \phi(x)\phi(y)d(z) \\ \bar{d}((xy)z) &= \bar{d}(xy)\phi(z) + \bar{\phi}(xy)\bar{d}(z) = d(x)\phi(y)\phi(z) + \phi(x)d(y)\phi(z) + \phi(x)\phi(y)d(z) \end{aligned}$$

pour tous $x, y, z \in V$, la proposition s'ensuit. \square

Cette dérivation induite par d se calcule par $\bar{\phi} \star d \star \bar{\phi}$. Pour des éléments $x_1 \cdots x_k \in TV$, elle s'écrit

$$\bar{d}(x_1 \cdots x_k) = \sum_{r=1}^k \phi(x_1) \cdots \phi(x_{r-1}) d(x_r) \phi(x_{r+1}) \cdots \phi(x_k).$$

Une cogèbre graduée $(C, \Delta_C, \varepsilon_C, 1_C)$ est dite *augmentée* si on a une décomposition $C = \mathbb{K}1_C \oplus \text{Ker } \varepsilon_C$. Le sous-espace $C^+ := \text{Ker } \varepsilon_C$ est isomorphe à la cogèbre graduée quotient $C/\mathbb{K}1_C$ sans counité ($\mathbb{K}1_C$ est une sous-cogèbre, donc un coidéal de C). Une cogèbre graduée sans counité est dite *nilpotente* si pour chaque élément $x \in C$, il existe un entier N tel que la N -ième itération de la comultiplication s'annule sur x . Les cogèbres graduées augmentées $(C, \Delta_C, \varepsilon_C, 1_C)$ dont C^+ (vu comme quotient) est nilpotente forment une sous-catégorie \mathcal{C}_{AN} de la catégorie des cogèbres graduées. La catégorie \mathcal{C}_{AN} est fermée pour le produit tensoriel et contient TV . La cogèbre $(TV, \Delta = \Delta_{TV}, \varepsilon)$ est *colibre* dans la catégorie \mathcal{C}_{AN} dans le sens qu'elle satisfait la propriété universelle suivante.

Théorème 1.1.4 *Pour toute cogèbre $(C, \Delta_C, \varepsilon_C) \in \mathcal{C}_{AN}$ et tout application linéaire $\phi : C \rightarrow V$ de degré 0 s'annulant sur 1_C , il existe un unique morphisme de cogèbres graduées $\bar{\phi} : C \rightarrow TV$ tel que $\text{pr}_V \circ \bar{\phi} = \phi$.*

$$\begin{array}{ccc}
TV & \xleftarrow{\bar{\phi}} & (C, \Delta_C) \\
\text{pr}_V \searrow & & \nearrow \phi \\
& V &
\end{array}
\quad \bar{\phi} \text{ vérifie } \Delta \circ \bar{\phi} = \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} \circ \Delta_C$$

$$\Leftrightarrow \sum_{(\bar{\phi}(x))} \bar{\phi}(x)_1 \otimes \bar{\phi}(x)_2 = \sum_{(x)} \bar{\phi}(x_1) \otimes \bar{\phi}(x_2) \quad (1.1.6)$$

Preuve. Soit $\phi^{\star n} = \mu^{(n-1)} \circ \phi^{\otimes n} \circ \Delta_C^{(n-1)}$, avec $\phi^{\star 0} = \mathbf{1}_{\varepsilon_C}$ et $\phi^{\star 1} = \phi$, et soit $\bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{\star n}$, bien défini par nilpotence. Pour $x \in \mathbb{K}1_C$, les équations s'annulent. Pour $x \in \text{Ker } \varepsilon_C$, on a, en notation de Sweedler :

$$\begin{aligned}
\Delta \circ \bar{\phi}(x) &= \mathbf{1} \otimes \phi(x) + \phi(x) \otimes \mathbf{1} \\
&\quad + \mathbf{1} \otimes \phi(x_1)\phi(x_2) + \phi(x_1) \otimes \phi(x_2) + \phi(x_1)\phi(x_2) \otimes \mathbf{1} \\
&\quad + \Delta(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)) + \dots \\
(\bar{\phi} \otimes \bar{\phi}) \circ \Delta_C(x) &= \mathbf{1}_{\varepsilon_C}(x_1) \otimes \phi(x_2) + \phi(x_1) \otimes \mathbf{1}_{\varepsilon_C}(x_2) \\
&\quad + \mathbf{1}_{\varepsilon_C}(\phi(x_1)) \otimes \phi(x_2)\phi(x_3) \\
&\quad + \phi(x_1) \otimes \phi(x_2) \\
&\quad + \phi(x_1)\phi(x_2) \otimes \mathbf{1}_{\varepsilon_C}(\phi(x_3)) + \dots
\end{aligned}$$

expressions égales à cause des propriétés de la counité ε_C . Pour un calcul plus rigoureux, on peut montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta \circ \mu^{(n)} = \sum_{i=0}^n (\mu^{(i)} \otimes \mu^{(n-i)}) \circ (id^{\otimes i} \otimes \Delta \otimes id^{\otimes n-i}) - \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{(i)} \otimes \mu^{(n-1-i)}$$

(avec $\mu^{(0)} = id$), puis calculer

$$\begin{aligned}
\Delta \circ \bar{\phi} &= \Delta \circ \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{\star n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta \circ \mu^{(n-1)} \circ \phi^{\otimes n} \circ \Delta_C^{(n-1)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\mu^{(i)} \otimes \mu^{(n-1-i)}) \circ (id^{\otimes i} \otimes \Delta \otimes id^{\otimes n-1-i}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{n-2} \mu^{(i)} \otimes \mu^{(n-2-i)} \right) \circ \phi^{\otimes n} \circ \Delta_C^{(n-1)}
\end{aligned}$$

et comme $\text{Im } \phi \subset V$, $\Delta \circ \phi = \phi \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \phi$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\mu^{(i)} \otimes \mu^{(n-1-i)}) \circ (\phi^{\otimes i} \otimes (\phi \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \phi)) \otimes \phi^{\otimes n-1-i} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{n-2} \mu^{(i)} \otimes \mu^{(n-2-i)} \circ \phi^{\otimes n} \right) \circ \Delta_C^{(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu^{(i)} \circ \phi^{\otimes i+1} \circ \Delta_C^{(i)} \otimes \mu^{(n-2-i)} \circ \phi^{\otimes n-1-i} \circ \Delta_C^{(n-2-i)} \circ \Delta_C \right. \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{(i-1)} \circ \phi^{\otimes i} \circ \Delta_C^{(i-1)} \otimes \mu^{(n-1-i)} \circ \phi^{\otimes n-i} \circ \Delta_C^{(n-1-i)} \circ \Delta_C \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{n-2} \mu^{(i)} \circ \phi^{\otimes i+1} \circ \Delta_C^{(i)} \otimes \mu^{(n-2-i)} \circ \phi^{\otimes n-1-i} \circ \Delta_C^{(n-2-i)} \circ \Delta_C \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^n \mu^{(i-1)} \circ \phi^{\otimes i} \circ \Delta_C^{(i-1)} \otimes \mu^{(n-1-i)} \circ \phi^{\otimes n-1} \circ \Delta_C^{(n-1-i)} \right) \circ \Delta_C \\
&= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^n \phi^{\star i} \otimes \phi^{\star n-i} \right) \circ \Delta_C = \left(\sum_{r \in \mathbb{N}} \phi^{\star r} \otimes \sum_{s \in \mathbb{N}} \phi^{\star s} \right) \circ \Delta_C \\
&= (\bar{\phi} \otimes \bar{\phi}) \circ \Delta_C,
\end{aligned}$$

ainsi $\bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{\star n}$ convient. Pour prouver l'unicité, dénotons par $\bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\phi}_n$, avec $\text{Im } \bar{\phi}_n \subset V^{\otimes n}$. On a

$$(\bar{\phi} \otimes \bar{\phi}) \circ \Delta_C = \Delta \circ \bar{\phi} \Rightarrow \mu \circ (\bar{\phi} \otimes \bar{\phi}) \circ \Delta_C = \mu \circ \Delta \circ \bar{\phi}.$$

Comme $(\mu \circ \Delta)(x_1 \cdots x_k) = (k+1)x_1 \cdots x_k$, cette dernière équation se lit comme $\bar{\phi} \star \bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)\bar{\phi}_n$. Ainsi, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, comme $\bar{\phi}_0 = \mathbf{1}_{\mathcal{E}_C}$,

$$\sum_{i=0}^n \bar{\phi}_i \star \bar{\phi}_{n-i} = (n+1)\bar{\phi}_n \Leftrightarrow (n-1)\bar{\phi}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\phi}_i \star \bar{\phi}_{n-i}.$$

Par récurrence, supposons que $\bar{\phi}_k = \phi^{\star k}$ pour $0 \leq k \leq n$, $n\bar{\phi}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \star \bar{\phi}_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n \phi^{\star n+1} = n\phi^{\star n+1}$, donc on a aussi $\bar{\phi}_{n+1} = \phi^{\star n+1}$ et ainsi $\bar{\phi}_n = \phi^{\star n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{\star n}$ est uniquement déterminé par ϕ . \square

Le morphisme de cogèbres $\bar{\phi}$ est dit être co-induit par $\phi : C^+ \rightarrow V$ et calculé comme $\bar{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{\star n}$, la série géométrique en utilisant la convolution par rapport à la multiplication libre μ et la comultiplication Δ_C .

Deux morphismes de cogèbres $\Phi, \Psi : TV \leftarrow C$ sont égaux si, et seulement si leurs projections $\text{pr}_V \circ \Phi$ et $\text{pr}_V \circ \Psi$ sont égales. Par exemple, μ_{sh} est co-induit par $\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V$, voir l'équation (1.1.10).

Proposition 1.1.5 *Soit $d : C^+ \rightarrow V$ une application linéaire de degré $j \in \mathbb{Z}$. Il existe une unique codérivation graduée de degré j le long de $\bar{\phi}$, notée $\bar{d} : C \rightarrow TV$, i.e. $\Delta \circ \bar{d} = (\bar{d} \otimes \bar{\phi} + \bar{\phi} \otimes \bar{d}) \circ \Delta_C$, telle que $\text{pr}_V \circ \bar{d} = d$.*

Preuve. En utilisant des arguments similaires, $\bar{d} = \bar{\phi} \star d \star \bar{\phi}$ convient. En effet, pour $x \in C^+$, en notation de Sweedler, les expressions suivantes sont égales.

$$\begin{aligned} \Delta \circ \bar{d}(x) &= \Delta \left(d(x) + d(x_1)\phi(x_2) + \phi(x_1)d(x_2) \right. \\ &\quad \left. + d(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)d(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)d(x_3) + \dots \right) \\ &= d(x) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d(x) + \Delta(d(x_1)\phi(x_2)) + \Delta(\phi(x_1)d(x_2)) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{d} \otimes \bar{\phi} + \bar{\phi} \otimes \bar{d}) \circ \Delta_C(x) &= d(x_1) \otimes \mathbf{1} \varepsilon_C(x_2) + \mathbf{1} \varepsilon_C(x_1) \otimes d(x_2) \\ &\quad + \mathbf{1} \otimes d(x_1)\phi(x_2) + d(x_1) \otimes \phi(x_2) + d(x_1)\phi(x_2) \otimes \mathbf{1} \\ &\quad + \mathbf{1} \otimes \phi(x_1)d(x_2) + \phi(x_1) \otimes d(x_2) + \phi(x_1)d(x_2) \otimes \mathbf{1} + \dots \end{aligned}$$

Comme auparavant, la composition avec μ

$$\Delta \circ \bar{d} = (\bar{d} \otimes \bar{\phi} + \bar{\phi} \otimes \bar{d}) \circ \Delta_C \Rightarrow \mu \circ \Delta \circ \bar{d} = \bar{d} \star \bar{\phi} + \bar{\phi} \star \bar{d}$$

donne l'unicité de \bar{d} . \square

Réciproquement, toute codérivation graduée $D : C \rightarrow TV$ est déterminée par ses composantes $d := \text{pr}_V \circ D$. De plus, d est déterminée par ses restrictions $d_k := d|_{C^k} : C^k \rightarrow V$ pour tout entier positif k .

En prenant comme cogèbre $C = (TV, \Delta)$ et considérant les codérivations le long de $\bar{\phi} = id_{TV}$, pour $d_1, d_2 : TV \rightarrow V$, on pose

$$d_1 \circ_G d_2 := d_1 \circ \bar{d}_2 = d_1 \circ (id_{TV} \star d_2 \star id_{TV}) = d_1 \circ \sum_{i,j=0}^{\infty} id^{\otimes i} \otimes d_2 \otimes id^{\otimes j} : TV \rightarrow V \quad (1.1.7)$$

la *multiplication de Gerstenhaber graduée*. Ainsi, le commutateur gradué $[\bar{d}_1, \bar{d}_2] = \bar{d}_1 \circ \bar{d}_2 - (-1)^{|d_1||d_2|} \bar{d}_2 \circ \bar{d}_1$ est une codérivation le long de id_{TV} , et elle est co-induite par $\text{pr}_V[\bar{d}_1, \bar{d}_2] = d_1 \circ_G d_2 - (-1)^{|d_1||d_2|} d_2 \circ_G d_1 =: [d_1, d_2]_G$, le *crochet de Gerstenhaber gradué* de d_1 et d_2 . On a donc égalité entre

$$d \circ_G \text{pr}_V[\bar{d}_1, \bar{d}_2] = d \circ [\bar{d}_1, \bar{d}_2] = (d \circ_G d_1) \circ_G d_2 - (-1)^{|d_1||d_2|} (d \circ_G d_2) \circ_G d_1$$

et

$$d \circ_G [d_1, d_2]_G = d \circ_G (d_1 \circ_G d_2) - (-1)^{|d_1||d_2|} d \circ_G (d_2 \circ_G d_1),$$

connue sous le nom d'identité de Gerstenhaber

$$(d \circ_G d_1) \circ_G d_2 - (-1)^{|d_1||d_2|} (d \circ_G d_2) \circ_G d_1 = d \circ_G [d_1, d_2]_G. \quad (1.1.8)$$

La composition \circ_G vérifie donc une identité de pré-Lie graduée, ce qui fait de $(\text{Hom}(\mathcal{T}V, V), [\ , \]_G)$ une algèbre de Lie graduée.

Les structures \circ_G et $[\ , \]_G$ ont été définies en premier par Gerstenhaber dans [Ger63] pour la situation $V[1]$ où l'espace gradué était $V = V^0$.

Lemme 1.1.6 *Soit $\mu : V \otimes V \rightarrow V$ une multiplication graduée associative (de degré 0). Alors l'application décalée $d = \mu[1] : V[1] \otimes V[1] \rightarrow V[1]$ est de degré 1, et l'associativité de μ est équivalente à $d \circ_G d = 0$.*

Preuve. En effet, on a

$$d : V[1]^{\otimes 2} \rightarrow V[1]$$

$$d(a \otimes b) = s^{-1} \circ \mu \circ (s \otimes s)(a \otimes b) = (-1)^{|a|} s^{-1} \mu(s(a) \otimes s(b)) = (-1)^{|a|} ab,$$

et pour $a, b, c \in V[1]$,

$$\begin{aligned} (d \circ_G d)(a \otimes b \otimes c) &= (\mu[1] \circ \overline{\mu[1]})(a \otimes b \otimes c) \\ &= \mu[1](\mu[1] \otimes id + id \otimes \mu[1])(a \otimes b \otimes c) \\ &= \mu[1](\mu[1](a \otimes b) \otimes c) + (-1)^{|a|} \mu[1](a \otimes \mu[1](b \otimes c)) \\ &= (-1)^{|a|} \mu[1](ab \otimes c) + (-1)^{|a|+|b|} \mu[1](a \otimes bc) \\ &= (-1)^{|a|+|ab|} (ab)c + (-1)^{2|a|+|b|} a(bc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{comme } |ab| &= |s^{-1}(sa \ sb)| = |a| + |b| + 1 \\ &= (-1)^{2|a|+|b|} (a(bc) - (ab)c) \\ &= (-1)^{|b|-1} \text{as}_{\mu[1]}(a, b, c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

1.1.4 Bigèbre symétrique

La *bigèbre symétrique graduée* sur V , $\mathcal{S}V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^n V$ est définie comme le quotient de l'algèbre libre $\mathcal{T}V$ par l'idéal engendré par tous les éléments $xy - (-1)^{|x||y|}yx$ de $\mathcal{T}V$ avec $x \in V^{|x|}$, $y \in V^{|y|}$. La multiplication associative qui en résulte, la *multiplication shuffle*² • est graduée commutative, *i.e.* pour deux éléments homogènes $a, b \in \mathcal{S}V$ on a $a \bullet b = (-1)^{|a||b|} b \bullet a$, et a pour unité **1**. Ainsi, le quotient $\mathcal{S}V$ est une algèbre graduée commutative et associative.

De plus, la première comultiplication Δ_{sh} passe au quotient et définit sur $\mathcal{S}V$ une comultiplication cocommutative graduée, encore notée Δ_{sh} . L'espace $\mathcal{S}V$ est ainsi une bigèbre graduée commutative et cocommutative. C'est l'algèbre graduée commutative libre engendrée par V .

² ou multiplication de battage

Pour un entier naturel n , une permutation σ du groupe symétrique S_n et $\xi = x_1 \cdots x_n \in V^{\otimes n}$, on note $\xi^\sigma = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ l'action à droite usuelle de S_n sur $\mathcal{T}V$. Définissant la *signature graduée de σ par rapport à ξ* par

$$\begin{aligned} e(x_1 \cdots x_n, \sigma) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) + (-1)^{|x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(j)}|} \sigma(j)}{i + (-1)^{|x_i||x_j|} j} \\ &= \prod_{i < j \text{ and } \sigma(i) > \sigma(j)} (-1)^{|x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(j)}|}, \end{aligned}$$

il y a une action à droite graduée $\xi \cdot \sigma = e(\xi, \sigma) \xi^\sigma$ de S_n sur $V^{\otimes n}$, car $e(\xi, \sigma \tau) = e(\xi, \sigma) e(\xi^\sigma, \tau)$.

Avec cette action, on peut donner une formule explicite pour la multiplication shuffle. Notons $Sh(k, n-k)$ l'ensemble des permutations shuffle, *i.e.* permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ et $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$. Alors

$$(x_1 \cdots x_k) \bullet (x_{k+1} \cdots x_n) = \sum_{\sigma^{-1} \in Sh(k, n-k)} e(x_1 \cdots x_n, \sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}. \quad (1.1.9)$$

Par exemple, on a $Sh(1, 1) = S_2 = \{id, (1\ 2)\}$, et $e(x_1 x_2, id) = 1$, $e(x_1 x_2, (1\ 2)) = (-1)^{|x_2||x_1|}$, d'où

$$x_1 \bullet x_2 = x_1 x_2 + (-1)^{|x_2||x_1|} x_2 x_1.$$

$$\begin{aligned} Sh(2, 1) &= \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{id, (2\ 3)^{-1}, (1\ 3\ 2)^{-1}\} \\ e(x_1 x_2 x_3, (23)) &= (-1)^{|x_3||x_2|}, \quad e(x_1 x_2 x_3, (132)) = (-1)^{|x_3|(|x_1|+|x_2|)} \\ x_1 x_2 \bullet x_3 &= x_1 x_2 x_3 + (-1)^{|x_3||x_2|} x_1 x_3 x_2 + (-1)^{|x_3|(|x_1|+|x_2|)} x_3 x_1 x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh(1, 2) &= \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \{id, (1\ 2)^{-1}, (1\ 2\ 3)^{-1}\} \\ e(x_1 x_2 x_3, (12)) &= (-1)^{|x_2||x_1|}, \quad e(x_1 x_2 x_3, (123)) = (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|)} \\ x_1 \bullet x_2 x_3 &= x_1 x_2 x_3 + (-1)^{|x_2||x_1|} x_2 x_1 x_3 + (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|)} x_2 x_3 x_1 \end{aligned}$$

On peut calculer la multiplication shuffle de manière récursive. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_1 \cdots x_n \in \mathcal{T}V$, on a $\lambda \bullet x_1 \cdots x_n = \lambda x_1 \cdots x_n = x_1 \cdots x_n \bullet \lambda$ et

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_k \bullet x_{k+1} \cdots x_n &= x_1 (x_2 \cdots x_k \bullet x_{k+1} \cdots x_n) \\ &\quad + (-1)^{|x_{k+1}|(|x_1|+\cdots+|x_k|)} x_{k+1} (x_1 \cdots x_k \bullet x_{k+2} \cdots x_n). \end{aligned}$$

Montrons que la multiplication shuffle est co-induite par l'application $\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V$.

$$\begin{aligned}\mu_{sh} &= \overline{\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V)^{\star n} \\ &\Leftrightarrow \text{pr}_V \circ \mu_{sh} = \text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V\end{aligned}\tag{1.1.10}$$

En effet, en notant $\xi = x_1 \cdots x_k$ et $\eta = x_{k+1} \cdots x_n$, on obtient par récurrence

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^{(n-1)} \circ (\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V)^{\otimes n} \circ \Delta^{[2](n-1)}(x_1 \cdots x_k \otimes x_{k+1} \cdots x_n) \\ = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^{(n-1)} \circ (\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V)^{\otimes n} (\xi_1 \otimes \eta_1 \otimes \xi_{\text{reste}} \otimes \eta_{\text{reste}}) \\ = \text{pr}_V(\xi_1) \varepsilon(\eta_1) (\xi_{\text{reste}} \bullet \eta_{\text{reste}}) + (-1)^{|\eta_1| |\xi|} \varepsilon(\xi_1) \text{pr}_V(\eta_1) (\xi_{\text{reste}} \bullet \eta_{\text{reste}}) \\ = \text{pr}_V(\xi_1) (\xi_{\text{reste}} \bullet \eta) + (-1)^{|\eta_1| |\xi|} \text{pr}_V(\eta_1) (\xi \bullet \eta_{\text{reste}}) \\ = x_1 (x_2 \cdots x_k \bullet x_{k+1} \cdots x_n) \\ + (-1)^{|x_{k+1}| (|x_1| + \cdots + |x_k|)} x_{k+1} (x_1 \cdots x_k \bullet x_{k+2} \cdots x_n).\end{aligned}$$

On peut alors facilement vérifier l'associativité de μ_{sh} : pour montrer que $\mu_{sh} \circ (\mu_{sh} \otimes id) = \mu_{sh} \circ (id \otimes \mu_{sh})$, il suffit de vérifier l'égalité sur les projections sur V .

$$\begin{aligned}\text{pr}_V \circ \mu_{sh} \circ (\mu_{sh} \otimes id) &= (\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V) \circ (\mu_{sh} \otimes id) \\ &= (\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V) \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \text{pr}_V \\ &= \text{pr}_V \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \text{pr}_V \\ &= \text{pr}_V \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes (\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V) \\ \text{pr}_V \circ \mu_{sh} \circ (id \otimes \mu_{sh}) &= (\text{pr}_V \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \text{pr}_V) \circ (id \otimes \mu_{sh})\end{aligned}$$

De la même manière que pour la cogèbre tensorielle, la cogèbre cocommutative graduée $\mathcal{S}V$ est colibre dans la catégorie \mathcal{CS}_{AN} des cogèbres graduées cocommutatives augmentés avec C^+ nilpotent, et la co-induction des morphismes et codérivations s'obtient comme dans le diagramme (1.1.6), où l'on remplace $\mathcal{T}V$ par $\mathcal{S}V$. On peut utiliser la multiplication shuffle μ_{sh} de $\mathcal{S}V$ au lieu de la multiplication μ de $\mathcal{T}V$ pour obtenir une autre convolution $\tilde{\star}$. Les morphismes et codérivations co-induits s'écrivent alors $\overline{\phi} = e^{\tilde{\star}\phi}$ au lieu de la série géométrique, et $\overline{d} = d \tilde{\star} e^{\tilde{\star}\phi}$ au lieu de $\overline{\phi} \star d \star \overline{\phi}$.

En prenant comme cogèbre $C = (\mathcal{S}V, \Delta_{sh})$ et considérant les codérivations le long de $\overline{\phi} = id_{\mathcal{S}V}$, pour $d_1, d_2 : \mathcal{S}V \rightarrow V$, on pose

$$d_1 \circ_{NR} d_2 := d_1 \circ \overline{d_2} = d_1 \circ (d_2 \tilde{\star} id_{\mathcal{S}V}) : \mathcal{S}V \rightarrow V\tag{1.1.11}$$

la multiplication de Nijenhuis-Richardson graduée. Explicitement, pour $d_1 \in \text{Hom}(\mathcal{S}^r V, V)$ et $d_2 \in \text{Hom}(\mathcal{S}^t V, V)$,

$$\begin{aligned}
& (d_1 \circ_{NR} d_2)(x_1 \bullet \cdots \bullet x_{r+t-1}) = \\
& \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq r+t-1} \prod_{p=1}^t (-1)^{|x_{i_p}|} \left(|x_1| + \cdots + \widehat{|x_{i_1}|} + \cdots + \widehat{|x_{i_{p-1}}|} + \cdots + |x_{i_p-1}| \right) \\
& d_1(d_2(x_{i_1} \bullet \cdots \bullet x_{i_t}) \bullet x_1 \bullet \cdots \bullet \widehat{x_{i_1}} \bullet \cdots \bullet \widehat{x_{i_t}} \bullet \cdots \bullet x_{r+t-1})
\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

pour $x_1, \dots, x_{r+t-1} \in V$, où $\widehat{}$ désigne l'omission de l'argument.

Comme précédemment, cette composition vérifie l'identité (1.1.8) avec \circ_G remplacé par \circ_{NR} , ce qui fait de $(\text{Hom}(\mathcal{S}V, V), [\ , \]_{NR})$ une algèbre de Lie graduée, où $[d_1, d_2]_{NR} := d_1 \circ_{NR} d_2 - (-1)^{|d_1||d_2|} d_2 \circ_{NR} d_1$ est le crochet de Nijenhuis-Richardson gradué.

Les structures \circ_{NR} et $[\ , \]_{NR}$ étaient définies dans [NR66] pour la situation $V[1]$ où l'espace gradué était $V = V^0$.

Lemme 1.1.7 *Soit $[\ , \] : V \otimes V \rightarrow V$ un crochet de Lie gradué (de degré 0). Alors l'application décalée $d = [\ , \][1] : V[1] \bullet V[1] \rightarrow V[1]$ est symétrique de degré 1, et l'identité de Jacobi graduée est équivalente à $d \circ_{NR} d = 0$.*

Preuve. En effet, on a

$$d : V[1]^{\otimes 2} \rightarrow V[1]$$

$$d(a \otimes b) = s^{-1} \circ [\ , \] \circ (s \otimes s)(a \otimes b) = (-1)^{|a|} s^{-1}[s(a), s(b)] = (-1)^{|a|} [a, b],$$

L'application $d = [\ , \][1]$ est symétrique de degré 1, car

$$\begin{aligned}
d(b \bullet a) &= (-1)^{|b|} [b, a] = -(-1)^{|b|+(|a|+1)(|b|+1)} [a, b] \\
&= (-1)^{|a||b|} (-1)^{|a|} [a, b] = (-1)^{|a||b|} d(a \bullet b),
\end{aligned}$$

et pour $a, b, c \in V[1]$,

$$\begin{aligned}
& (d \circ_{NR} d)(a \bullet b \bullet c) \\
&= d(d(a \bullet b) \bullet c) + (-1)^{|b||c|} d(d(a \bullet c) \bullet b) + (-1)^{|a|(|b|+|c|)} d(d(b \bullet c) \bullet a) \\
&= (-1)^{|a|} d([a, b] \bullet c) + (-1)^{|b||c|+|a|} d([a, c] \bullet b) \\
&\quad + (-1)^{|a|(|b|+|c|)+|b|} d([b, c] \bullet a) \\
&= (-1)^{2|a|+|b|+1} [[a, b], c] + (-1)^{|b||c|+2|a|+|c|+1} [[a, c], b] \\
&\quad + (-1)^{|a|(|b|+|c|)+2|b|+|c|+1} [[b, c], a] \\
&= (-1)^{|b|+1} [[a, b], c] + (-1)^{|b||c|+|c|+2+(|a|+1)(|c|+1)} [[c, a], b] \\
&\quad + (-1)^{|a|(|b|+|c|)+|c|+1} [[b, c], a] \\
&= (-1)^{|b|+1} (-1)^{(|a|+1)(|c|+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left((-1)^{(|a|+1)(|c|+1)} [[a, b], c] + (-1)^{(|b|+1)(|a|+1)} [[b, c], a] \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{(|c|+1)(|b|+1)} [[c, a], b] \right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

puisque $[\ , \]$ vérifie l'identité de Jacobi graduée sur V . (Le degré de $x \in V$ est $|x| + 1$ où $|x|$ est le degré de $x \in V[1]$). \square

1.1.5 Algèbres enveloppantes

Soit \mathbb{K} un anneau commutatif et \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} . Une \mathfrak{g} -représentation de \mathfrak{g} (à gauche) est un \mathbb{K} -module \mathcal{M} muni d'un morphisme $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $x \otimes a \mapsto xa$ tel que $x(ya) - y(xa) = [x, y]a$. On associe à chaque algèbre de Lie \mathfrak{g} , une \mathbb{K} -algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ telle que les \mathfrak{g} -représentation (à gauche) et les $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -représentation (à gauche) soient équivalentes. L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est construite de la façon suivante.

Soit $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ l'algèbre tensorielle sur le \mathbb{K} -module \mathfrak{g} ,

$$\mathcal{T}\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^n \mathfrak{g} \quad \text{où} \quad \mathcal{T}^n \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g} \quad (n \text{ fois}).$$

En particulier $\mathcal{T}^0 \mathfrak{g} = \mathbb{K}\mathbf{1}$ et $\mathcal{T}^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. La multiplication de $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ est le produit tensoriel. Chaque application \mathbb{K} -linéaire $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ s'étend de manière unique en une application de $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ -module de $\mathcal{T}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Si $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est un \mathfrak{g} -module, alors l'espace vectoriel \mathfrak{g} dans $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ n'est en général pas une sous-algèbre de Lie représentée sur \mathcal{M} . On peut remédier à cela si, et seulement si les éléments de $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ où $x, y \in \mathfrak{g}$, sont envoyés sur 0. Par conséquent, on est amené à introduire l'idéal bilatère I engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ où $x, y \in \mathfrak{g}$. L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} est ainsi définie comme étant $\mathcal{T}\mathfrak{g}/I$. Il s'ensuit que les \mathfrak{g} -représentations s'identifient aux $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -modules. Chaque $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -bimodule \mathcal{M} est un \mathfrak{g} -module avec $(x, m) \rightarrow xm - mx$, noté \mathcal{M}_a .

Supposons que \mathfrak{g} est un \mathbb{K} -module libre. Choisissons $\{x_i\}$ une base de \mathfrak{g} et notons y_i l'image de x_i par l'application $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On pose $y_I = y_{i_1} \cdots y_{i_p}$ où I est une suite finie d'indices i_1, \dots, i_p et $y_I = 1$ si $I = \emptyset$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt affirme que l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est engendrée par les éléments y_I correspondants aux suites croissantes de I .

On note $\mathcal{S}V$ l'algèbre symétrique sur un \mathbb{K} -module V . Si $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, il existe une bijection canonique entre $\mathcal{S}\mathfrak{g}$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ qui est un isomorphisme de \mathfrak{g} -module entre $\mathcal{S}\mathfrak{g}$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_a)$ (voir [Dix74, pp.78-79] ou [LV12, Section 3.6.13]).

1.2 COHOMOLOGIE ET DÉFORMATIONS

On rappelle brièvement les notions de cohomologie de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg. Les déformations formelles d'anneaux et d'algèbres ont été introduites par M. Gerstenhaber en 1964 ([Ger66]). Il a donné un outil pour déformer les structures algébriques, basé sur les séries formelles. L'intérêt pour les déformations s'est accru avec le développement des groupes quantiques reliés à la mécanique quantique ([BFF⁺78]). Des exemples de groupes quantiques peuvent être obtenus par déformation de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

1.2.1 Cohomologie de Hochschild

Soit (\mathcal{A}, μ) une algèbre associative sur le corps \mathbb{K} et \mathcal{M} un \mathcal{A} -bimodule. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace des cochaînes de Hochschild de degré n à valeurs dans \mathcal{M} , $C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes n}, \mathcal{M})$, et $C_H^0(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \mathcal{M}$. On définit $C_H(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ qui est ainsi un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué en posant $C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \{0\}$ pour les entiers n négatifs.

Pour $f \in C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M})$, on définit le n -ième opérateur de cobord de Hochschild par

$$\begin{aligned} (\delta_H^n f)(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_1 f(a_2, \dots, a_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ le n -ième groupe de cohomologie de Hochschild à valeurs dans \mathcal{M} ,

$$H_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \frac{\text{Ker}(\delta_H^n : C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \rightarrow C_H^{n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{M}))}{\text{Im}(\delta_{n-1} : C_H^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \rightarrow C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}))} := \frac{Z C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M})}{B C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M})} \quad (1.2.2)$$

où l'on pose à nouveau $H_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \{0\}$ pour n entier négatif. On note aussi $H_H(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := Z C_H(\mathcal{A}, \mathcal{M}) / B C_H(\mathcal{A}, \mathcal{M})$.

1.2.2 Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie munie d'une représentation $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}(V, V)$. L'espace des cochaînes de Chevalley-Eilenberg de degré n est donné par $C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V) := \text{Hom}(\bigwedge^k \mathfrak{g}, V)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_{CE}^0(\mathfrak{g}, V) := \mathfrak{g}$ et $C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V) := \{0\}$ pour les entiers n négatifs. Pour $f \in C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V)$, on définit le n -ième opérateur de cobord de Chevalley-Eilenberg par

$$\begin{aligned}
(\delta_{CE}^n f)(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \rho(x_i) f(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\
&+ \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_{CE}^n(\mathfrak{g}, V)$ le n -ième groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg à valeurs dans V

$$H_{CE}^n(\mathfrak{g}, V) := \frac{\text{Ker}(\delta_{CE}^n : C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C_{CE}^{n+1}(\mathfrak{g}, V))}{\text{Im}(\delta_{CE}^{n-1} : C_{CE}^{n-1}(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V))} := \frac{Z C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V)}{B C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V)} \tag{1.2.4}$$

où l'on pose à nouveau $H_{CE}^n(\mathfrak{g}, V) := \{0\}$ pour n entier négatif. On note aussi $H_{CE}(\mathfrak{g}, V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_{CE}^n(\mathfrak{g}, V)^n := Z C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V) / B C_{CE}^n(\mathfrak{g}, V)$.

1.2.3 Propriétés

Pour calculer les cohomologies de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et \mathfrak{g} respectivement, on utilisera les deux théorèmes suivants.

Le théorème classique dû à H.Cartan et S.Eilenberg, ([CE56, p.277]) donne un lien entre la cohomologie de Hochschild d'une algèbre enveloppante à valeurs dans un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -bimodule \mathcal{M} (en particulier $\mathcal{M} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$) et la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie à valeurs dans le même module.

Théorème 1.2.1 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{K} . Alors*

$$H_H^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{M}) \simeq H_{CE}^n(\mathfrak{g}, \mathcal{M}_a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En particulier, si $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$

$$H_H^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{U}(\mathfrak{g})) \simeq H_{CE}^n(\mathfrak{g}, \mathcal{U}(\mathfrak{g}_a)) \simeq H_{CE}^n(\mathfrak{g}, \mathcal{S} \mathfrak{g}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le théorème de Hochschild-Serre [HS53] donne la factorisation suivante des groupes de cohomologie de Chevalley-Eilenberg dans le cas d'une algèbre de Lie résoluble.

Théorème 1.2.2 *Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur \mathbb{K} , où \mathfrak{n} est le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{g} et \mathfrak{t} la sous-algèbre supplémentaire de \mathfrak{n} , réductive dans \mathfrak{g} , telle que le \mathfrak{t} -module induit sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_a$ est semi-simple. Alors pour tout entier naturel non nul p , on a*

$$H_{CE}^p(\mathfrak{g}, \mathcal{U}(\mathfrak{g}_a)) \simeq \sum_{i+j=p} H_{CE}^i(\mathfrak{t}, \mathbb{K}) \otimes H_{CE}^j(\mathfrak{n}, \mathcal{U}(\mathfrak{g}_a))^{\mathfrak{t}}.$$

où $H_{CE}^j(\mathfrak{n}, \mathcal{U}(\mathfrak{g}_a))^{\mathfrak{t}}$ est le sous-espace des éléments \mathfrak{t} -invariants.

1.2.4 Lien avec les déformations

Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans \mathbb{K} . Pour un \mathbb{K} -espace vectoriel E , on note $E[[t]]$ le $\mathbb{K}[[t]]$ -module des séries formelles à coefficients dans E . Soit (\mathcal{A}, μ_0) une \mathbb{K} -algèbre associative (resp. de Lie), alors $(\mathcal{A}[[t]], \mu_0)$ est une $\mathbb{K}[[t]]$ -algèbre associative (resp. de Lie).

Une *déformation formelle* d'une \mathbb{K} -algèbre associative (resp. de Lie) \mathcal{A} est une $\mathbb{K}[[t]]$ -algèbre associative (resp. de Lie) $(\mathcal{A}[[t]], \mu)$ telle que

$$\mu = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \cdots + t^n\mu_n + \cdots,$$

où $\mu_n \in \text{Hom}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{A})$ (resp. $\mu_n \in \text{Hom}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \mathcal{A})$). De plus, deux déformations $(\mathcal{A}[[t]], \mu)$ et $(\mathcal{A}[[t]], \mu')$ sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme formel

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 t + \cdots + \varphi_n t^n + \cdots,$$

avec $\varphi_0 = id_{\mathcal{A}}$ (Identité sur \mathcal{A}) et $\varphi_n \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ tel que

$$\mu'(a, b) = \varphi_t^{-1}(\mu(\varphi(a), \varphi(b))) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Une déformation de \mathcal{A} est appelée *triviale* si elle est équivalente à $(\mathcal{A}[[t]], \mu_0)$. Une algèbre associative (resp. de Lie) \mathcal{A} est dite *rigide* si toute déformation de \mathcal{A} est triviale.

Il y a un lien entre déformation formelle et cohomologie de Hochschild dans le cas d'une algèbre associative, cohomologie de Chevalley-Eilenberg dans le cas d'une algèbre de Lie. On note $H_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ le n -ième groupe de cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative \mathcal{A} à valeurs dans le bimodule \mathcal{M} et $H_{CE}^n(\mathfrak{g}, \mathcal{M})$ le n -ième groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie \mathcal{A} à valeurs dans le \mathfrak{g} -module \mathcal{M} . Le deuxième groupe de cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative (resp. groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie) à valeurs dans l'algèbre peut être interprété comme le groupe des déformations infinitésimales. Le théorème de rigidité de Gerstenhaber [Ger66] (resp. de Nijenhuis-Richardson [NR66]) affirme que si le 2-ième groupe de cohomologie de Hochschild $H_H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ (resp. de Chevalley-Eilenberg $H_{CE}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$) d'une algèbre associative \mathcal{A} (resp. d'une algèbre de Lie \mathfrak{g}) s'annule, alors l'algèbre (resp. l'algèbre de Lie) est rigide. Ainsi, les algèbres semi-simples associatives (resp. de Lie) sont rigides car leur deuxième groupe de cohomologie est trivial ([GS86]).

Le troisième groupe de cohomologie correspond aux obstructions pour étendre une déformation d'ordre n en une déformation d'ordre $n + 1$ ([Ger66], [Ger63] and [NR66]).

La rigidité des algèbres de Lie complexes de dimension n a été étudiée par R. Carles, Y. Diakité, M. Goze et J.M. Ancochea-Bermudez. Carles et Diakité ont établi la classification pour $n \leq 7$ ([CD84],[Car84]), et Ancochea avec Goze ont effectué la classification pour les algèbres de Lie résolubles pour $n = 8$ et certaines classes ([GAB01]). La classification des algèbres associatives rigides est connue jusqu'à $n \leq 6$ (see [GM96]).

FORMALITÉ DE KONTSEVICH

SOMMAIRE

2.1	DÉFINITIONS	25
2.2	CAS DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES	26
2.2.1	Algèbres de Lie graduées différentielles	26
2.2.2	Sections	28
2.2.3	Formalité	28
2.2.4	Application à la déformation	32
2.3	CAS DES ALGÈBRES DE LIE	33
2.3.1	Champs de polyvecteurs et fonctions polynômiales	33
2.3.2	Structure de Poisson linéaire	34
2.3.3	Formalité	35
2.4	ALGÈBRES ENVELOPPANTES	37
2.5	LEMME DE PERTURBATION	38
2.5.1	Cohomologie à deux degrés	41
2.5.2	Résultat général	43

PARTANT d'une algèbre associative ou de Lie, on peut munir son complexe de cochaînes correspondant d'une structure d'algèbre de Lie graduée par décalage. Il en est de même pour sa cohomologie en passant au quotient. La question qui se pose est de savoir si la cohomologie s'injecte dans le complexe de cochaînes en tant que sous-algèbre de Lie graduée. Ce n'est pas le cas en général, une demande plus souple est d'avoir un morphisme à homotopie près.

C'est précisément ce qui amène à la notion de formalité. L'application la plus célèbre de la formalité est d'obtenir une déformation formelle associative d'une algèbre associative au départ. Toutefois, même s'il n'y a pas formalité pour les crochets de Lie considérés, une version du *Lemme de perturbation* pour les algèbres de

Lie différentielles graduées permet de perturber la différentielle liée à la cohomologie en ajoutant des termes d'arités supérieures au crochet de Lie, et ainsi de modifier sa structure L_∞ pour obtenir un morphisme d'algèbres L_∞ . Par ailleurs, grâce aux propriétés homologiques des algèbres enveloppantes, on démontre que la formalité qu'on associe à une algèbre de Lie est équivalente à celle de son algèbre (associative) enveloppante.

2.1 DÉFINITIONS

Soit $V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V^j$ un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué.

Définition 2.1.1 On appelle *algèbre de Lie différentielle graduée* un triplet $(V, [\ , \], \delta)$ où $[\ , \] : V \otimes V \rightarrow V$ est un crochet de Lie et où $\delta : V \rightarrow V$, la *différentielle*, est une dérivation de degré 1 et de carré nul, *i.e.* vérifiant

$$\delta \circ [\ , \] = [\ , \] \circ (\delta \otimes id_V + id_V \otimes \delta) \quad \delta \circ \delta = 0. \quad (2.1.1)$$

On considère l'espace vectoriel gradué décalé $V[1]$ de V .

Définition 2.1.2 Une *structure L_∞ sur V* est une codérivation graduée D de $\mathcal{S}(V[1])$ de degré 1 telle que $D^2 = 0$ et la restriction $\text{pr}_{V[1]} D|_{\mathcal{S}^0(V[1])} = 0$, c'est donc une différentielle de $\mathcal{S}(V[1])$. Le couple (V, D) est appelé *algèbre L_∞* .

Soit (V, D) une algèbre L_∞ et $d := \text{pr}_V D$ donc $D = \bar{d}$ au sens de (1.1.11). Pour tout entier naturel k , on note d_k la restriction $d_k := d|_{\mathcal{S}^k(V[1])}$.

En particulier, une algèbre de Lie graduée $(V, [\ , \])$ est considérée comme étant une algèbre L_∞ , puisque la codérivation $D = \bar{d}$ induite par $d = [\ , \]|_1$ est une structure L_∞ d'après le Lemme 1.1.7, en projetant sur $V[1]$.

Un *morphisme L_∞* d'une algèbre $L_\infty (V, D)$ vers une algèbre $L_\infty (V', D')$ est un morphisme de cogèbres graduées différentielles $\Phi : \mathcal{S}(V[1]) \rightarrow \mathcal{S}(V'[1])$, *i.e.* Φ est un morphisme de cogèbres graduées respectant les différentielles,

$$(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{S}(V[1])} = \Delta_{\mathcal{S}(V'[1])} \circ \Phi \quad \text{et} \quad \Phi \circ D = D' \circ \Phi. \quad (2.1.2)$$

On dit de plus que Φ est un *quasi-isomorphisme L_∞* si sa première composante $\Phi_1 := \Phi|_{V[1]}$ induit un isomorphisme en cohomologie.

En particulier, un morphisme d'algèbres de Lie graduées $\phi : (V, [\ , \]) \rightarrow (V', [\ , \]')$ définit un morphisme d'algèbres L_∞ par $\Phi = \bar{\phi}$ tel que l'application Φ soit égale à sa première composante $\Phi_1 := \Phi|_{V[1]}$ qui n'est autre que $\phi[1]$.

Soit $(V, [\ , \], \delta)$ une algèbre de Lie différentielle graduée. On considère d'une part la différentielle D sur $\mathcal{S}(V[1])$ induite par $\delta + [\ , \]|_1$ et d'autre part son homologie H pour la différentielle δ . Si celle-ci est encore une algèbre de Lie graduée par passage au

quotient pour le crochet induit $[\ ,]'$, on dispose de D' , la différentielle de $\mathcal{S}(H[1])$ induite par $[\ ,]'[1]$.

Définition 2.1.3 On dit que l'algèbre $L_\infty(V, D)$ est *formelle* s'il existe un quasi-isomorphisme L_∞ noté Φ entre (H, D') et (V, D) tel $\Phi|_{H[1]}$ soit une injection dans les cocycles.

Dans la suite, on spécialise la notion de formalité pour le complexe de Hochschild d'une algèbre associative, ainsi que pour le complexe de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie.

2.2 CAS DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES

2.2.1 Algèbres de Lie graduées différentielles

Soit (\mathcal{A}, μ) une algèbre associative sur le corps \mathbb{K} . On note $\mathfrak{A} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}^n$ le complexe des cochaînes de Hochschild à valeurs dans \mathcal{A} , comme défini dans la Section 1.2.1. On a donc $\mathfrak{A}^n := C_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes n}, \mathcal{A})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{A}^0 := \mathcal{A}$ et $\mathfrak{A}^n := \{0\}$ pour les entiers n négatifs. De même, on note \mathfrak{a}^n le n -ième groupe de cohomologie de Hochschild et $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{a}^n$.

On peut obtenir certaines propriétés de la cohomologie de Hochschild en utilisant la multiplication de Gerstenhaber (1.1.7)

$$\circ_G : C_H^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \times C_H^l(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \rightarrow C_H^{k+l-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$$

donnée sur des éléments par

$$(f \circ_G g)(a_1, \dots, a_{k+l-1}) = \sum_{i=1}^k (-1)^{(i-1)(l-1)} f(a_1, \dots, a_{i-1}, g(a_i, \dots, a_{i+l-1}), a_{i+l}, \dots, a_{k+l-1}) \quad (2.2.1)$$

et le crochet de Gerstenhaber, donné par

$$[f, g]_G := f \circ_G g - (-1)^{(k-1)(l-1)} g \circ_G f.$$

Proposition 2.2.1 *L'espace décalé $(\mathfrak{A}[1], [\ ,]_G)$ est une algèbre de Lie graduée.*

On la notera par $(\mathcal{G}, [\ ,]_G)$.

Preuve. En effet, on a

$$\mathfrak{A}[1] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\mathcal{A}[1]^{\otimes n}, \mathcal{A}[1]) \simeq \text{Hom} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}[1]^{\otimes n}, \mathcal{A}[1] \right) = \text{Hom}(\mathcal{T}V, V)$$

où V est l'espace sous-jacent de $\mathcal{A}[1]$, et grâce à l'identité de Gerstenhaber (1.1.8), on sait que $(\text{Hom}(\mathcal{T}V, V), [\ ,]_G)$ est une algèbre de Lie graduée. \square

La multiplication μ est un élément de \mathfrak{A}^2 , vu comme $m = \mu[1] \in \mathcal{G}^1$, avec $|m| = 1$. D'après le Lemme 1.1.6, elle est associative si, et seulement si $[m, m]_G = 0$.

Définissons $b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ par $b := [m, \]_G$. Pour $f \in \mathfrak{A}^k$, $b(f) = [m, f]_G = \mu[1] \circ_G f - (-1)^{|f|} f \circ_G \mu[1]$. Pour $a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathcal{A}[1]$ ($|a_i| = -1$),

$$\begin{aligned} & (\mu[1] \circ_G f)(a_1, \dots, a_{k+1}) \\ &= \mu[1](f \otimes id + id \otimes f)(a_1, \dots, a_{k+1}) \\ &= \mu[1](f(a_1, \dots, a_k) \otimes a_{k+1}) + (-1)^{|a_1||f|} \mu[1](a_1 \otimes f(a_2, \dots, a_{k+1})) \\ &= (-1)^k a_1 f(a_2, \dots, a_{k+1}) - f(a_1, \dots, a_k) a_{k+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f \circ_G \mu[1])(a_1, \dots, a_{k+1}) &= (f \circ \overline{\mu[1]})(a_1, \dots, a_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{k+1}), \end{aligned}$$

donc $(\delta_H f)(a_1, \dots, a_{k+1}) = ((-1)^k \mu[1] \circ_G f + f \circ_G \mu[1])(a_1, \dots, a_{k+1})$ et

$$\delta_H f = f \circ_G \mu[1] - (-1)^{k-1} \mu[1] \circ_G f = [f, \mu[1]]_G = (-1)^{|f|} [\mu[1], f] = (-1)^{|f|} b(f),$$

l'opérateur de cobord de Hochschild δ_H et b sont égaux au signe global $(-1)^{|f|}$ près, on peut donc travailler avec b plutôt que δ_H .

L'opérateur b est une dérivation graduée de \mathcal{G} . En effet, pour $f, g \in \mathcal{G}$, l'identité de Jacobi graduée donne

$$\begin{aligned} & (-1)^{|\mu[1]||g|} [\mu[1], [f, g]_G]_G + (-1)^{|g||f|} [g, [\mu[1], f]_G]_G + (-1)^{|f||\mu[1]|} [f, [g, \mu[1]]_G]_G = 0 \\ & \Leftrightarrow (-1)^{|g|} b([f, g]_G) + (-1)^{|g||f|} [g, b(f)]_G + (-1)^{|f|} [f, [g, \mu[1]]_G]_G = 0 \\ & \Leftrightarrow (-1)^{|g|} b([f, g]_G) - (-1)^{|g||f|+|g|(|f|+1)} [b(f), g]_G - (-1)^{|f|+|g||1|} [f, b(g)]_G = 0 \\ & \Leftrightarrow (-1)^{|g|} \left(b([f, g]_G) - [b(f), g]_G - (-1)^{|f|} [f, b(g)]_G \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow b([f, g]_G) = [b(f), g]_G + (-1)^{|f|} [f, b(g)]_G. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Pour montrer que le carré de l'opérateur b est nul, on prenant $f = m$ dans l'équation précédente, on obtient

$$b^2(g) = [m, [m, g]_G]_G = [[m, m]_G, g]_G - [m, [m, g]_G]_G,$$

et comme μ est associative, le premier terme du second membre s'annule, ainsi $b^2(g) = [m, [m, g]_G]_G = -[m, [m, g]_G]_G = 0$. L'espace $(\mathcal{G}, [,]_G, b)$ est donc muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée différentielle.

L'identité de Jacobi graduée implique que le crochet de Gerstenhaber passe au quotient en un crochet de Lie gradué $[\cdot, \cdot]_s$, appelé crochet de Schouten, sur la cohomologie décalée $\mathfrak{a}[1]$, qui sera notée \mathfrak{g} . Ainsi, $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_s)$ est une algèbre de Lie graduée.

2.2.2 Sections

On appellera *section* une injection linéaire graduée ϕ de degré 0 de la cohomologie de Hochschild \mathfrak{g} dans le sous-espace des cocycles de \mathcal{G} , *i.e.*

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G} \text{ avec } b \circ \phi = 0 \quad (2.2.3)$$

telle que

$$p \circ \phi = id_{\mathfrak{g}} \quad (2.2.4)$$

où p est la projection canonique de l'espace des cocycles sur \mathfrak{g} .

Proposition 2.2.2 *L'ensemble de toutes les sections est en bijection avec l'ensemble de tous les espaces vectoriels gradués supplémentaires \mathcal{H} de $B\mathcal{G}$ dans $Z\mathcal{G}$.*

Preuve. Soit ϕ une section. On définit $\mathcal{H} := \text{Im } \phi$. Comme $b\phi = 0$, on a $\mathcal{H} \subset Z\mathcal{G}$. Soit $f \in Z\mathcal{G}$. Alors

$$p(f - \phi p f) = p f - p \phi p f \stackrel{(2.2.4)}{=} p f - p f = 0,$$

ainsi $f - \phi p f \in B\mathcal{G}$ et $Z\mathcal{G} = \mathcal{H} + B\mathcal{G}$. Soit $g \in \mathcal{H} \cap B\mathcal{G}$. Alors il existe $x \in \mathfrak{g}$ avec $g = \phi x$ et $pg = 0$, donc $0 = pg = p\phi x = x$, et $g = 0$. Ainsi $\mathcal{H} \cap B\mathcal{G} = \{0\}$, et $Z\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus B\mathcal{G}$.

Réciproquement, soit \mathcal{H} un supplémentaire gradué de $B\mathcal{G}$ dans $Z\mathcal{G}$, donc $Z\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus B\mathcal{G}$. Alors la restriction de p à \mathcal{H} est une bijection linéaire de degré 0 vers \mathfrak{g} . Définissons $\tilde{\phi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{H}$ par $\tilde{\phi} := (p|_{\mathcal{H}})^{-1}$ et $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ par la composition $\phi := i_{\mathcal{H}} \circ \tilde{\phi}$, où $i_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ est l'injection canonique. On a $b\phi = 0$ puisque l'image de ϕ est dans $\mathcal{H} \subset Z\mathcal{G}$. De plus, $p\phi = p \circ i_{\mathcal{H}} \circ \tilde{\phi} = p|_{\mathcal{H}} \tilde{\phi} = id_{\mathfrak{g}}$. Soit $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ une autre section ayant pour image \mathcal{H} , *i.e.* $\psi = i_{\mathcal{H}} \circ \tilde{\psi}$. Alors $id_{\mathfrak{g}} = p\psi = p|_{\mathcal{H}} \tilde{\psi}$, et pour tout $h = \tilde{\psi}(x) \in \mathcal{H}$, $\tilde{\psi} p|_{\mathcal{H}} h = \tilde{\psi} p|_{\mathcal{H}} \tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x) = h$, donc $\tilde{\psi} = (p|_{\mathcal{H}})^{-1} = \tilde{\phi}$, ce qui implique $\psi = \phi$. \square

2.2.3 Formalité

En général, une section $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie graduées $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_s) \rightarrow (\mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}})$: par construction, pour deux classes $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ on a seulement

$$\phi[\xi, \eta]_s = [\phi(\xi), \phi(\eta)]_{\mathcal{G}} + b(\phi_2(\xi, \eta)) \quad (2.2.5)$$

donc ϕ est un morphisme d'algèbres de Lie graduées à un cobord $b(\phi_2(\xi, \eta))$ près. On peut espérer continuer cette construction pour les termes d'ordres supérieurs. C'est précisément ce qui amène à la notion de morphisme L_∞ : une suite d'applications linéaires $\phi_1 := \phi, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_k, \dots$ compatibles avec les crochets à homotopies d'ordres supérieures près. Ces applications peuvent être vues comme les composantes d'une codérivation graduée d'une algèbre symétrique graduée, ce qui établit le lien avec la Définition 2.1.2.

On considère les espaces décalés $\mathfrak{g}[1]$ et $\mathcal{G}[1]$. On note $D = [\ , \]_G[1]$ et $d = [\ , \]_s[1]$ les crochets décalés sur \mathcal{G} et sur \mathfrak{g} . Grâce au décalage, il s'ensuit que les deux applications $[\ , \]_G[1]$ et $[\ , \]_s[1]$ sont *symétriques* graduées (Lemme 1.1.7), i.e. $[\ , \]_G[1]$ est une application de degré 1 de $\mathcal{S}^2(\mathcal{G}[1]) \rightarrow \mathcal{G}[1]$ et $[\ , \]_s[1]$ une application de degré 1 de $\mathcal{S}^2(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathfrak{g}[1]$. Soit $\bar{d} : \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1])$ l'unique codérivation de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}[1])$ induite par $[\ , \]_s[1]$, et soit $\overline{b+D}$ l'unique codérivation de $\mathcal{S}(\mathcal{G}[1])$ induite par $b + [\ , \]_G[1]$.

Proposition 2.2.3 *Les applications \bar{d} et $\overline{b+D}$ sont des différentielles, munissant respectivement (\mathfrak{g}, \bar{d}) et $(\mathcal{G}, \overline{b+D})$ de structure d'algèbres L_∞ .*

Preuve. En projetant sur $\mathfrak{g}[1]$, on a

$$\bar{d} \circ \bar{d} = 0 \Leftrightarrow \text{pr}_{\mathfrak{g}[1]} \bar{d} \circ \bar{d} = 0 \Leftrightarrow d \circ \bar{d} = 0 \Leftrightarrow d \circ_{NR} d = 0,$$

ainsi, que \bar{d} soit une différentielle est équivalent au fait que le carré de d pour la multiplication de Nijenhuis-Richardson s'annule, ce qui est équivalent par le Lemme 1.1.7 à l'identité de Jacobi graduée pour le crochet $[\ , \]_s$.

De même, projetant sur $\mathcal{G}[1]$, on a

$$\overline{b+D} \circ \overline{b+D} = 0 \Leftrightarrow (b+D) \circ_{NR} (b+D) = 0.$$

Comme pour d , l'identité de Jacobi graduée pour $[\ , \]_G$ implique que $D \circ_{NR} D = 0$, et puisque b ne prend qu'un seul argument, on a $b \circ_{NR} b = b \circ_G b = b \circ b = 0$ car on sait déjà que b est une différentielle. Il reste à prouver que $b \circ_{NR} D + D \circ_{NR} b = 0$. Pour $f, g \in \mathcal{G}[1]$, on a d'une part $(b \circ_{NR} D)(f \bullet g) = b(D(f \bullet g)) = (-1)^{|f|} b([f, g]_G)$, et d'autre part,

$$\begin{aligned} (D \circ_{NR} b)(f \bullet g) &= D(b(f) \bullet g) + (-1)^{|f||g|} D(b(g) \bullet f) \\ &= (-1)^{|b(f)||g|} [b(f), g]_G + (-1)^{|f||g|+|b(g)|} [b(g), f]_G \\ &= (-1)^{|f|+1} [b(f), g]_G - (-1)^{|f||g|+|b(g)|+(|b(g)|+1)(|f|+1)} [f, b(g)]_G \\ &= (-1)^{|f|+1} [b(f), g]_G + [f, b(g)]_G. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(b \circ_{NR} D + D \circ_{NR} b)(f \bullet g) = (-1)^{|f|} \left(b([f, g]_G) - [b(f), g]_G - (-1)^{|f|+1} [f, b(g)]_G \right) = 0,$$

car b est une dérivation graduée de \mathcal{G} d'après (2.2.2). \square

Définition 2.2.4 Le complexe de Hochschild \mathcal{G} associé à l'algèbre associative (\mathcal{A}, μ) est dit *formel* s'il existe un quasi-isomorphisme L_∞ (morphisme de cogèbres différentielles graduées de degré 0) $\Phi : \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G}[1])$, *i.e.*

$$(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{S}\mathfrak{g}[1]} = \Delta_{\mathcal{S}\mathcal{G}[1]} \circ \Phi \quad \text{et} \quad \overline{b+D} \circ \Phi = \Phi \circ \overline{d}, \quad (2.2.6)$$

tel que la restriction Φ_1 de Φ à $\mathfrak{g}[1]$ soit une section. On appelle alors Φ une *application de formalité*.

Les restrictions $\Phi_k := \text{pr}_{\mathcal{G}[1]} \circ \Phi|_{\mathcal{S}^k \mathfrak{g}[1]}$ pour tout entier positif k sont appelés les *coefficients de Taylor de Φ* et déterminent Φ . Ils remédient ordre par ordre au fait mentionné auparavant que la section Φ_1 n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie graduées.

En particulier, un morphisme d'algèbres de Lie graduées $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ définit une application de formalité $\Phi = \phi[1]$.

Originellement dans [Kon03], les applications de formalité étaient définies depuis l'espace \mathfrak{g} sans décalage par une famille d'applications multilinéaires. Cette définition est plus utile pour les calculs. Avant de la donner, on aura besoin de définir les signes suivants.

Définition 2.2.5 Pour $k \in \mathbb{N}$, $\forall x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathfrak{g}$, $\forall 1 \leq i < j \leq k+1$,

$$\epsilon_{ij}(x_1, \dots, x_{k+1}) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot (-1)^{(|x_i|+|x_j|)(|x_1|+\dots+|x_{i-1}|)+|x_j|(|x_{i+1}|+\dots+|x_{j-1}|)} (-1)^{i+j},$$

et $\forall 1 \leq a \leq k$, $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k+1$,

$$\omega_a(x_1, \dots, x_{k+1}) = \prod_{r=1}^a (-1)^{|x_{i_r}|(|x_1|+\dots+|x_{i_1}|+\dots+\widehat{|x_{i_{r-1}}|}+\dots+|x_{i_{r-1}}|)} \cdot (-1)^{(k-a)(|x_{i_1}|+\dots+|x_{i_a}|)} (-1)^{i_1+\dots+i_a} (-1)^{\frac{(k+1-a)(k-a)}{2}}.$$

Proposition 2.2.6 On considère une suite d'applications linéaires $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, avec $\phi_k : \mathfrak{g}^{\otimes k} \rightarrow \mathcal{G}$, satisfaisant les propriétés

- (i) ϕ_1 est une section
- (ii) ϕ_k est de degré $1-k$

(iii) ϕ_k est antisymétrique graduée, i.e. pour tous $1 \leq i \leq k$,

$$\phi_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_k) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi_k(x_1, \dots, x_k). \quad (2.2.7)$$

et telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\forall x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} \epsilon_{ij} \cdot \phi_k([x_i, x_j]_s, x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{k+1}) \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} b \phi_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq k+1} \omega_a \cdot [\phi_a(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}), \phi_{k+1-a}(x_1, \dots, \widehat{x_{i_1}}, \dots, \widehat{x_{i_a}}, \dots, x_{k+1})]_G,$$

où $\epsilon_{ij} := \epsilon_{ij}(x_1, \dots, x_{k+1})$ et $\omega_a := \omega_a(x_1, \dots, x_{k+1})$.

Alors $\Phi = e^{\tilde{\mathbf{x}}\varphi}$ est une application de formalité, où $\varphi = \sum_{k \geq 1} \phi_k[1]$.

Remarque 2.2.7

Ordre $k = 0$ On a $0 = b\phi_1$, qui est l'équation (2.2.3) pour les sections.

Ordre $k = 1$ L'équation s'écrit

$$\begin{aligned} -\phi_1([x_1, x_2]_s) &= -b\phi_2(x_1, x_2) \\ &+ \frac{1}{2} \left(-[\phi_1(x_1), \phi_2(x_2)]_G + (-1)^{|x_1||x_2|} [\phi_1(x_2), \phi_1(x_1)]_G \right) \end{aligned}$$

qui est (2.2.5).

Ordre $k = 2$ On obtient la formule

$$\begin{aligned} & \phi_2([x_1, x_2]_s, x_3) \\ &+ (-1)^{|x_3|(|x_1|+|x_2|)} \phi_2([x_3, x_1]_s, x_2) \\ &+ (-1)^{(|x_2|+|x_3|)|x_1|} \phi_2([x_2, x_3]_s, x_1) \\ &= -b\phi_3(x_1, x_2, x_3) \\ &+ (-1)^{|x_1|} [\phi_1(x_1), \phi_2(x_2, x_3)]_G \\ &+ (-1)^{|x_2|} (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|)} [\phi_1(x_2), \phi_2(x_3, x_1)]_G \\ &+ (-1)^{|x_3|} (-1)^{(|x_1|+|x_2|)|x_3|} [\phi_1(x_3), \phi_2(x_1, x_2)]_G. \end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire plus simplement

$$\begin{aligned} \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \phi_2([x_1, x_2]_s, x_3) &= -b\phi_3(x_1, x_2, x_3) \\ &+ \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} (-1)^{|x_1|} [\phi_1(x_1), \phi_2(x_2, x_3)]_G \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

en convenant que dans la notation $\circlearrowleft_{x_1, x_2, x_3}$ sont ajoutés les signes provenant des permutations entre les x_i .

Esquisse de preuve. Le lien avec la première définition apparaît en prenant la projection $\text{pr}_{\mathcal{G}[1]} : \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathcal{G}[1]$ de la seconde équation de (2.2.6). Avec $d = d_2 := [,]_s[1]$ et $D = D_2 := [,]_G[1]$, on obtient

$$\varphi \circ (d_2 \tilde{\star} id_{\mathcal{S}(\mathfrak{g}[1])}) = (b + D_2) \circ e^{\tilde{\star} \varphi}.$$

Comme $b = b \circ \text{pr}_{\mathcal{G}[1]}$ et $D_2 = D_2 \circ \text{pr}_{\mathcal{S}^2(\mathfrak{g}[1])}$, ceci s'écrit

$$\varphi \circ (d_2 \tilde{\star} id_{\mathcal{S}(\mathfrak{g}[1])}) = b \circ \varphi + \frac{1}{2} D_2 \circ \varphi \tilde{\star} \varphi.$$

Appliquant ceci à $y_1 \bullet \dots \bullet y_{k+1} \in \mathcal{S}^{k+1}(\mathfrak{g}[1])$, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{(|y_i|+|y_j|)(|y_1|+\dots+|y_{i-1}|)+|y_j|(|y_{i+1}|+\dots+|y_{j-1}|)} \\ & \quad \cdot \varphi_k(d_2(y_i \bullet y_j) \bullet y_1 \bullet \dots \bullet \widehat{y}_i \bullet \dots \bullet \widehat{y}_j \bullet \dots \bullet y_{k+1}) \\ & = b \varphi_{k+1}(y_1 \bullet \dots \bullet y_{k+1}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq k+1} \prod_{r=1}^a (-1)^{|y_{i_r}|(|y_1|+\dots+|\widehat{y}_{i_1}|+\dots+\widehat{y}_{i_{r-1}}|+\dots+|y_{i_r-1}|)} \\ & \quad \cdot D_2(\varphi_a(y_{i_1} \bullet \dots \bullet y_{i_a}) \bullet \varphi_{k+1-a}(y_1 \bullet \dots \bullet \widehat{y}_{i_1} \bullet \dots \bullet \widehat{y}_{i_a} \bullet \dots \bullet y_{k+1})). \end{aligned}$$

Avec $\varphi_k := \phi_k[1] = s^{-1} \circ \phi_k \circ s^{\otimes k}$, $y_i := s^{-1} x_i$ et un scrupuleux calcul des signes, on obtient l'équation (2.2.8). \square

2.2.4 Application à la déformation

La théorie de déformation formelle de l'algèbre associative (\mathcal{A}, μ_0) est très simple si l'algèbre de Lie différentielle graduée \mathcal{G} est formelle, comme l'a montré Kontsevich dans [Kon03]. (On reprend ici la présentation de [BM08, pp. 321–322].) Soit

$$\pi \in H_{\text{H}}^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})[[h]] = \mathfrak{a}^2[[h]] = \mathfrak{g}[1]^1[[h]] \quad \text{tel que} \quad [\pi, \pi]_s = 0.$$

Alors il est toujours possible de construire une déformation associative formelle $\mu = \mu_0 + \mu_*$ où $\mu_* := \sum_{r=1}^{\infty} h^r \mu_r$ telle que la classe de cohomologie $[\mu_1]$ de μ_1 est égale à π .

Considérons $\mathcal{S}(\mathfrak{g}[1])[[h]]$ et $\mathcal{S}(\mathcal{G}[1])[[h]]$ comme bigèbres topologiques (par rapport à la topologie h -adique) avec les extensions canoniques de toutes les applications de structure. Il est à noter que le produit tensoriel n'est plus algébrique, mais donné par $(\mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]) \otimes \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]))[[h]]$. Soit \bullet la multiplication shuffle dans une algèbre symétrique graduée. Pour un espace vectoriel V quelconque,

on peut voir que les éléments de type groupe de $\mathcal{S}V[[h]]$ ne sont plus seulement $\mathbf{1}$, mais des fonctions exponentielles de n'importe quel élément primitif de degré zéro, *i.e.* de la forme $e^{\bullet hv}$ avec $v \in V^0[[h]]$. L'image $\Phi(e^{\bullet h\pi})$ de l'élément de type groupe $e^{\bullet h\pi}$ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}[1])[[h]]$ par l'application de formalité Φ est un élément de type groupe dans $\mathcal{S}(\mathcal{G}[1])[[h]]$, donc de la forme $e^{\bullet \mu_*}$ avec $\mu_* \in h\mathfrak{A}^2[[h]]$. Comme $[\pi, \pi]_s = 0$ on a $d(e^{\bullet h\pi}) = 0$, et donc $(b + D)(e^{\bullet h\mu_*}) = 0$. Projetant cette dernière équation sur $\mathcal{G}[1]^0[[h]] = \mathfrak{A}^2[[h]]$, on obtient l'équation de Maurer-Cartan

$$0 = b\mu_* + \frac{1}{2}[\mu_*, \mu_*]_G = \frac{1}{2}[\mu_0 + \mu_*, \mu_0 + \mu_*]_G,$$

montrant l'associativité de $\mu = \mu_0 + \mu_*$. Ainsi $\mu := \mu_0 + \mu_*$ est une déformation associative formelle de l'algèbre (\mathcal{A}, μ_0) .

2.3 CAS DES ALGÈBRES DE LIE

2.3.1 Champs de polyvecteurs et fonctions polynômiales

On considère les champs de polyvecteurs comme des fonctions polynômiales, on reprend ici l'explication de [BM08, pp. 324–325] de cette correspondance.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non gradué (\mathbb{Z} -gradué de degré 0) et $\mathcal{A} := \mathcal{S}E$ son algèbre symétrique. D'après le Théorème 1.2.1 de Cartan-Eilenberg, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{H}_H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \cong \bigwedge^n E^* \otimes \mathcal{S}E =: \mathcal{T}_{poly}^n$$

où le dernier espace est l'espace des champs de polyvecteurs algébriques de rang n . On pose $\mathcal{T}_{poly} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_{poly}^n$.

Pour les calculs, on utilisera l'identification canonique de $\mathcal{S}E$ avec les fonctions polynômiales sur l'espace dual E^* . Soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de E et $\{e^i\}_{i=1}^n$ sa base duale, on peut considérer $f \in \mathcal{S}E$ comme un polynôme en les coordonnées x_i , en écrivant tout $x \in E^*$ comme $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$. Les champs de polyvecteurs sont à présent des fonctions polynômiales à valeurs dans $\bigwedge E^*$. En utilisant des dérivées partielles $\partial_i := \partial/\partial x_i$ dans $\mathcal{S}E$ et des produits intérieurs ι_{e_i} par rapport à la base duale dans $\bigwedge E^*$, on peut écrire le crochet de Gerstenhaber résultant $[\ ,]_s$ sous sa forme classique comme un crochet de Schouten

$$[\xi, \eta]_s := (-1)^{|\xi|-1} \sum_{i=1}^n \iota_{e_i} \xi \wedge \partial_i \eta - (-1)^{|\eta|-1} \sum_{i=1}^n \iota_{e_i} \eta \wedge \partial_i \xi, \quad (2.3.1)$$

où $|\xi|$ et $|\eta|$ sont les rangs des champs de polyvecteurs ξ et η dans \mathcal{T}_{poly} .

Comme le crochet de Gerstenhaber, le crochet de Schouten définit une algèbre de Lie graduée sur l'espace décalé $\mathcal{T}_{poly}[1]$. On retrouve donc les identités de la Définition 1.1.1 : avec $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{T}_{poly}[1]$ on a

$$\begin{aligned} [\eta, \xi]_s &= -(-1)^{|\eta||\xi|} [\xi, \eta]_s, \\ (-1)^{|\xi||\zeta|} [[\xi, \eta]_s, \zeta]_s + (-1)^{|\eta||\xi|} [[\eta, \zeta]_s, \xi]_s + (-1)^{|\zeta||\eta|} [[\zeta, \xi]_s, \eta]_s &= 0, \end{aligned}$$

les degrés étant ceux de $\mathcal{T}_{poly}[1]$.

De plus, la multiplication extérieure \wedge munit $\mathcal{T}_{poly} = \mathcal{S}(E^* \oplus E^*[-1])$ d'une structure d'algèbre commutative graduée. Le crochet de Schouten et la multiplication extérieure sont liés par la relation de Leibniz graduée

$$[\xi, \eta \wedge \zeta]_s = [\xi, \eta]_s \wedge \zeta + (-1)^{|\xi|(|\eta|+1)} \eta \wedge [\xi, \zeta]_s, \quad (2.3.2)$$

(si η est de degré $|\eta|$ dans $\mathcal{T}_{poly}[1]$ alors il est de degré $|\eta| + 1$ dans \mathcal{T}_{poly}).

Dans les calculs, on utilisera le fait que \mathcal{T}_{poly} est un $\mathcal{S}E$ -module *i.e.* pour $\xi \in \mathcal{T}_{poly}$, $f \in \mathcal{S}E$, $f \wedge \xi = f\xi$. On donne aussi quelques exemples de crochets de Schouten qui seront utilisés par la suite.

Exemple 2.3.1 L'espace \mathcal{T}_{poly}^1 est l'espace des champs de vecteurs, *i.e.* les dérivations de $\mathcal{S}E = \mathcal{T}_{poly}^0$. Pour $f, g \in \mathcal{S}E$, $X, Y \in \mathcal{T}_{poly}^1$

$$\begin{aligned} [f, g]_s &= 0, \\ [X, f]_s &= X(f) = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i f, \\ [X, Y]_s &= [X, Y] = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i Y - \sum_{i=1}^n Y_i \partial_i X, \end{aligned}$$

avec en particulier

$$[f \partial_i, g \partial_j] = f(\partial_i g) \partial_j - g(\partial_j f) \partial_i.$$

2.3.2 Structure de Poisson linéaire

Prenons $E = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie de dimension finie n et \mathfrak{g}^* son dual algébrique. La structure de \mathfrak{g} permet de définir un crochet de Poisson linéaire sur \mathfrak{g}^* : pour $f, g \in \mathcal{S}\mathfrak{g}$ et $x \in \mathfrak{g}^*$

$$\{f, g\}(x) := x([\mathbf{d}f(x), \mathbf{d}g(x)]), \quad (2.3.3)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\{f, g\}(x) = P(df, dg)(x) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} C_{ij}^k x_k \partial_i f \wedge \partial_j g$$

avec $P \in \mathcal{S}^1 \mathfrak{g} \otimes \wedge^2 \mathfrak{g}^* = \mathcal{T}_{poly}^2$ le bivecteur défini par

$$P = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \quad \text{où} \quad P^{ij}(x) = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k \quad (2.3.4)$$

et C_{ij}^k les constantes de structure de \mathfrak{g} .

Proposition 2.3.2 *Avec les notations précédentes, $(\mathcal{S}\mathfrak{g}, \cdot, \{, \})$ est une algèbre de Poisson.*

Preuve. Le crochet défini par P vérifie l'identité de Leibniz à cause de la règle de Leibniz pour les dérivations. L'identité de Jacobi pour P s'obtient par récurrence, en utilisant le fait que $\{e_i, e_j\} = [e_i, e_j]$ et que le crochet $[,]$ vérifie l'identité de Jacobi par définition. \square

2.3.3 Formalité

Le fait que P soit une structure de Poisson est équivalent à ce que $[P, P]_s = 0$. Ainsi, l'opérateur défini par $\delta_P := [P,]_s$ est une différentielle sur le complexe \mathcal{T}_{poly} , dont la cohomologie est appelée *cohomologie de Poisson*.

Par calcul, on voit que le complexe $(\mathcal{T}_{poly}, \delta_P)$ s'identifie au complexe de Chevalley-Eilenberg $(C_{CE}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}), \delta_{CE})$. On note $\mathfrak{A}[1] := \mathcal{T}_{poly}[1]$ cette algèbre de Lie différentielle graduée et l'on note $\mathfrak{a}[1] := H_{CE}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g})[1]$ sa cohomologie à valeurs dans $\mathcal{S}\mathfrak{g}$, qui est encore une algèbre de Lie graduée par passage au quotient, avec le crochet de Schouten induit $[,]'_s$.

Comme dans le cas (Section 2.2.3) où l'algèbre de départ est associative, on considère \overline{d} l'unique codérivation de $\mathcal{S}(\mathfrak{a}[2])$ induite par $[,]'_s[1]$ et $\overline{\delta_{CE} + D}$, l'unique codérivation de $\mathcal{S}(\mathfrak{A}[2])$ induite par $\delta_{CE} + [,]'_s[1]$. Ce sont également des différentielles, ce qui peut se reformuler comme suit.

Proposition 2.3.3 *Les applications \overline{d} et $\overline{\delta_{CE} + D}$ sont des différentielles, munissant respectivement $(\mathfrak{a}[1], \overline{d})$ et $(\mathfrak{A}[1], \overline{\delta_{CE} + D})$ de structure d'algèbres L_∞ .*

Définition 2.3.4 Le complexe de Chevalley-Eilenberg $\mathfrak{A}[1]$ associé à l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [,])$ est dit *formel* s'il existe un quasi-isomorphisme $L_\infty \Phi : \mathcal{S}(\mathfrak{a}[2]) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{A}[2])$, i.e.

$$(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{S}\mathfrak{a}[2]} = \Delta_{\mathcal{S}\mathfrak{A}[2]} \circ \Phi \quad \text{et} \quad \overline{\delta_{CE} + D} \circ \Phi = \Phi \circ \bar{d}, \quad (2.3.5)$$

tel que la restriction Φ_1 de Φ à $\mathfrak{a}[2]$ soit une section. On appelle alors Φ une *application de formalité*.

Comme on le verra par la suite, même s'il n'y a pas formalité entre $\mathcal{S}(\mathfrak{a}[2])$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{A}[2])$, on peut toujours modifier la structure L_∞ induite par $d = d_2 = [,]'_s[1]$ en $d = \sum_{n \geq 2} d_n$ et construire par récurrence les composantes de la différentielle \bar{d} et du morphisme $L_\infty \Phi = \bar{\varphi}$. Ils vérifient l'équation

$$\Phi \circ \bar{d} = \overline{\delta_{CE} + D} \circ \Phi, \quad (2.3.6)$$

qui s'écrit, après projection sur $\mathfrak{A}[2]$ et en utilisant le fait que $D = D_2 = [,]_s[1]$,

$$\varphi \circ (d \tilde{\star} id_{\mathcal{S}(\mathfrak{a}[2])}) = \delta_{CE} \circ \varphi + \frac{1}{2} D_2 \circ \varphi \tilde{\star} \varphi. \quad (2.3.7)$$

Comme $d = \sum_{n \geq 2} d_n$, en évaluant sur $y_1 \bullet \dots \bullet y_{k+1} \in \mathcal{S}(\mathfrak{a}[2])$, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{a=2}^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq k+1} \nu_a(y_1, \dots, y_{k+1}) \\ & \quad \cdot \varphi_{k+2-a}(d_a(y_{i_1} \bullet \dots \bullet y_{i_a}) \bullet y_1 \bullet \dots \bullet \widehat{y_{i_1}} \bullet \dots \bullet \widehat{y_{i_a}} \bullet \dots \bullet y_{k+1}) \\ & = \delta_{CE} \varphi_{k+1}(y_1 \bullet \dots \bullet y_{k+1}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq k+1} \nu_a(y_1, \dots, y_{k+1}) \\ & \quad \cdot D_2(\varphi_a(y_{i_1} \bullet \dots \bullet y_{i_a}) \bullet \varphi_{k+1-a}(y_1 \bullet \dots \bullet \widehat{y_{i_1}} \bullet \dots \bullet \widehat{y_{i_a}} \bullet \dots \bullet y_{k+1})). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Par rapport à la définition originelle (Proposition 2.2.6), les applications $\varphi_k = \phi_k[1]$ sont de degré 0 ($|\phi_k[1]| = 1(k-1) + |\phi_k| = 0$), et les signes

$$\nu_a(y_1, \dots, y_{k+1}) = \prod_{r=1}^a (-1)^{|y_r|(|y_1| + \dots + |\widehat{y_{i_1}}| + \dots + |\widehat{y_{i_{r-1}}}| + \dots + |y_{i_r-1}|)}$$

pour $1 \leq a \leq k+1$ correspondent seulement à la permutation qui place les éléments d'indices i_1, \dots, i_a en premier.

En revanche, il faut prendre garde aux signes en travaillant avec les applications décalées, par exemple $D_2(x, y) = (-1)^{|x|} [x, y]_s$.

2.4 ALGÈBRES ENVELOPPANTES

Soient $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie de dimension finie et $\mathcal{S}\mathfrak{g}$ l'algèbre de Poisson qui lui est associée. Conservant les notations précédentes, on considère les complexes ci-dessous et leurs crochets décalés associés.

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{a} := H_{\mathbb{H}}(\mathcal{S}\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) & \mathfrak{a}' := H_{\text{CE}}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{A} := C_{\mathbb{H}}(\mathcal{S}\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) & \mathfrak{A}' := C_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \mathcal{U}\mathfrak{g}) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l|l} d := [\cdot, \cdot]_{\mathcal{S}}[1] & d' := [\cdot, \cdot]'_{\mathcal{S}}[1] \\ D := [\cdot, \cdot]_{\mathbb{G}}[1] & \mathbf{D} := [\cdot, \cdot]_{\mathbb{G}}[1] \end{array} \right.$$

Les espaces $(\mathfrak{a}[1], [\cdot, \cdot]_{\mathcal{S}})$ et $(\mathfrak{a}'[1], [\cdot, \cdot]'_{\mathcal{S}})$ sont des algèbres de Lie graduées et $(\mathfrak{A}[1], [\cdot, \cdot]_{\mathbb{G}}, \mathbf{b})$ et $(\mathfrak{A}'[1], [\cdot, \cdot]_{\mathbb{G}}, \mathbf{b})$ sont des algèbres de Lie graduées différentielles. Le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{G}}$ et la différentielle $\mathbf{b} := [\mathbf{m}, \cdot]_{\mathbb{G}}$ sont en gras pour rappeler qu'ils proviennent de l'algèbre associative $(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \mathbf{m})$, dont la multiplication est différente de celle de $(\mathcal{S}\mathfrak{g}, \cdot)$.

Dans son célèbre article [Kon03], Kontsevich donne une formule explicite pour une application de formalité

$$\Phi : (\mathcal{S}(\mathfrak{a}[2]), \overline{d}) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathfrak{A}[2]), \overline{\mathbf{b} + \mathbf{D}}).$$

En considérant $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ comme une déformation convergente de $\mathcal{S}\mathfrak{g}$, Bordemann et Makhlouf ([BM08][Théorème 6.1]) twistent par conjugaison cette application et obtiennent un morphisme L_{∞}

$$\Phi' : (\mathcal{S}(\mathfrak{a}[2]), \overline{\delta_{\text{CE}} + d}) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathfrak{A}'[2]), \overline{\mathbf{b} + \mathbf{D}}).$$

On utilise ici l'identification entre les complexes $(\mathfrak{a} \cong T_{\text{poly}}, \delta_P)$ et $(C_{\text{CE}}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}), \delta_{\text{CE}})$.

Ceci leur permet de montrer que la formalité associée à une algèbre de Lie \mathfrak{g} est équivalente à celle pour son algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathfrak{g}$.

Théorème 2.4.1 ([BM08]) *La formalité du complexe $C_{\text{CE}}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g})$ est équivalente à la formalité du complexe $C_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \mathcal{U}\mathfrak{g})$.*

Preuve. Supposons que le complexe $C_{\text{CE}}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g})$ soit formel, il existe donc un quasi-isomorphisme L_{∞} noté

$$\Phi'' : (\mathcal{S}(\mathfrak{a}'[2]), \overline{d'}) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathfrak{a}[2]), \overline{\delta_{\text{CE}} + d})$$

tel que Φ''_1 soit une section. En composant avec Φ' , on obtient une application de formalité

$$\Phi : (\mathcal{S}(\mathfrak{a}'[2]), \overline{d'}) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathfrak{A}'[2]), \overline{\mathbf{b} + \mathbf{D}}).$$

Comme $\mathfrak{a}' = H_{\text{CE}}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) \cong H_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \mathcal{U}\mathfrak{g})$ d'après le Théorème 1.2.1 de Cartan-Eilenberg, $\Phi = \Phi' \circ \Phi''$ est bien une application de formalité entre les cogèbres symétriques construites sur la cohomologie et le complexe de Hochschild de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$.

Réciproquement, si le complexe $C_H(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \mathcal{U}\mathfrak{g})$ est formel, on dispose de l'application précédente Φ et on obtient l'application de formalité Φ'' par composition avec le morphisme L_∞ inverse Φ^{-1} . \square

2.5 LEMME DE PERTURBATION

Soient $(\mathcal{G}, \overline{D})$ et $(\mathfrak{g}, \overline{d})$ deux algèbres L_∞ . Il n'y a pas nécessairement de morphisme L_∞ de $(\mathfrak{g}, \overline{d})$ vers $(\mathcal{G}, \overline{D})$. Néanmoins, on peut perturber l'application \overline{d} en \overline{d}' et construire une application $\phi : \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathcal{G}[1]$ telle que $\Phi = \overline{\phi} : \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G}[1])$ soit un morphisme L_∞ entre $(\mathfrak{g}, \overline{d}')$ et $(\mathcal{G}, \overline{D})$.

Le *Lemme de perturbation* est un résultat provenant de la théorie de perturbation homologique permettant, à partir d'une contraction entre deux complexes différentiels et d'une perturbation d'une des différentielles, de construire une nouvelle contraction entre les complexes munis de différentielles perturbées. Huebschmann traite dans [Hue11, Hue10] le cas des algèbres graduées différentielles et des algèbres L_∞ ; il montre comment construire une nouvelle contraction naturelle en les structures données. Ceci permet de construire par récurrence une application de formalité. Cette construction a aussi été effectuée par Bordemann et al. dans [BGH⁺05, Bor] pour les structures L_∞ et d'autres opérades.

Plus précisément, on a les résultats suivants. On définit premièrement les termes *contraction* et *perturbation*, puis on énonce le *Lemme de perturbation*. On effectue ensuite la construction d'un morphisme L_∞ dans le cas où la cohomologie est concentrée en degrés 0 et 1, en reprenant [BGH⁺05, A.4, Prop. A.3]. On donne enfin le résultat sans faire d'hypothèse particulière sur la cohomologie.

Définition 2.5.1 Une *contraction* est la donnée de deux complexes différentiels (U, d_U) et (V, d_V) avec des morphismes $i : U \rightarrow V$, $p : V \rightarrow U$, i.e.

$$d_V \circ i = i \circ d_U, \quad d_U \circ p = p \circ d_V \quad (2.5.1a)$$

et une application $h : V \rightarrow V$ de degré -1 telle que

$$p \circ i = id_U \quad (2.5.1b)$$

$$id_V - i \circ p = d_V h + h d_V \quad (2.5.1c)$$

$$h^2 = 0 \quad h \circ i = 0 \quad p \circ h = 0, \quad (2.5.1d)$$

alors p est une surjection appelée *projection*, i est une injection appelée *inclusion* et h est une *homotopie* entre id_V et $i \circ p$. On résume les équations (2.5.1) par le diagramme

$$(U, d_U) \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{p} \end{array} (V, d_V) \quad \curvearrowright h. \quad (2.5.2)$$

Remarque 2.5.2

- (i) La condition (2.5.1c) implique que les cohomologies de U et V sont isomorphes. En notant $[f, g] := f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f$ le commutateur gradué de deux applications, cette équation (2.5.1c) peut aussi s'écrire $id_V - i \circ p = [d_V, h]$.
- (ii) Les équations (2.5.1d) sont appelées *conditions de bord*. Elles sont équivalentes à l'équation $hd_V h = h$ (h est dite *adaptée*) et peuvent toujours être satisfaites en remplaçant si besoin h par $hd_V h$.

Définition 2.5.3 Une *perturbation* de la différentielle d_V est un morphisme $\delta : V \rightarrow V$ de degré +1 tel que $(d_V + \delta)^2 = 0 \Leftrightarrow \delta^2 + [\delta, d_V] = 0$.

Lemme 2.5.4 (Lemme de perturbation) *Étant donné une contraction filtrée*

$$(U, d_U) \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{p} \end{array} (V, d_V) \quad \curvearrowright h$$

et une perturbation δ de d_V , soient

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= (id_V + h\delta)^{-1} i = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-h\delta)^n i & \tilde{h} &= (id_V + h\delta)^{-1} h = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-h\delta)^n h \\ \tilde{p} &= p(id_V + \delta h)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(-\delta h)^n & \tilde{\delta} &= p(id_V + \delta h)^{-1} \delta i = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(-\delta h)^n \delta i. \end{aligned}$$

Si les filtrations sur U et V sont complètes, alors ces séries convergent, $\tilde{\delta}$ est une perturbation de d_U et il existe une contraction filtrée

$$(U, d_U + \tilde{\delta}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{i}} \\ \xleftarrow{\tilde{p}} \end{array} (V, d_V + \delta) \quad \curvearrowright \tilde{h}.$$

Ce résultat a été publié premièrement dans [Bro65].

Preuve. On montre que les nouvelles applications $\tilde{i}, \tilde{p}, \tilde{h}, d_V + \delta, d_U + \tilde{\delta}$ vérifient les équations (2.5.1). Notant $id := id_V$, on remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned} \delta(id + h\delta)^{-1} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(-h\delta)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-\delta h)^n \delta = (id + \delta h)^{-1} \delta, \\ (id + h\delta)^{-1} h &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-h\delta)^n h = \sum_{n \in \mathbb{N}} h(-\delta h)^n = h(id + \delta h)^{-1}; \\ d_V(id + h\delta) + (id - [d_V, h])\delta &= d_V + \delta - hd_V \delta = (id + h\delta)(d_V + \delta), \\ (id + \delta h)d_V + \delta(id - [d_V, h]) &= d_V + \delta - \delta d_V h = (d_V + \delta)(id + \delta h), \end{aligned}$$

en utilisant $\delta^2 = -\delta d_V - d_V \delta$ dans les deux dernières équations. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\tilde{i} \circ (d_U + \tilde{\delta}) &= (id + h\delta)^{-1} (i \circ d_U + i \circ p \circ \delta (id + h\delta)^{-1} i) \\
&= (id + h\delta)^{-1} (d_V \circ i + (id - [d_V, h]) \delta \tilde{i}) \\
&= (id + h\delta)^{-1} \left(d_V (id + h\delta) + (id - [d_V, h]) \delta \right) \tilde{i} \\
&= (id + h\delta)^{-1} \left((id + h\delta) (d_V + \delta) \right) \tilde{i} \\
&= (d_V + \delta) \tilde{i}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
(d_U + \tilde{\delta}) \circ \tilde{p} &= (d_U \circ p + p(id + \delta h)^{-1} \delta \circ i \circ p)(id + \delta h)^{-1} \\
&= (p \circ d_V + \tilde{p} \delta (id - [d_V, h]))(id + \delta h)^{-1} \\
&= \tilde{p} \left((id + \delta h) d_V + \delta (id - [d_V, h]) \right) (id + \delta h)^{-1} \\
&= \tilde{p} \left((d_V + \delta) (id + \delta h) \right) (id + \delta h)^{-1} \\
&= \tilde{p} (d_V + \delta).
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
id - \tilde{i} \circ \tilde{p} &= id - (id + h\delta)^{-1} i \circ p (id + \delta h)^{-1} \\
&= (id + h\delta)^{-1} \left((id + h\delta) (id + \delta h) - (id - [d_V, h]) \right) (id + \delta h)^{-1} \\
&= (id + h\delta)^{-1} \left([h, d_V + \delta] + h\delta^2 h \right) (id + \delta h)^{-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[(d_V + \delta), \tilde{h}] &= (id + h\delta)^{-1} h (d_V + \delta) + (d_V + \delta) h (id + \delta h)^{-1} \\
&= (id + h\delta)^{-1} \left(h (d_V + \delta) (id + \delta h) + (id + h\delta) (d_V + \delta) h \right) (id + \delta h)^{-1} \\
&= (id + h\delta)^{-1} \left([h, d_V + \delta] - h[\delta, d_V] h \right) (id + \delta h)^{-1}
\end{aligned}$$

donc on a bien

$$id - \tilde{i} \circ \tilde{p} = [(d_V + \delta), \tilde{h}].$$

Finalement,

$$\tilde{p} \circ \tilde{i} = p \sum_{n \in \mathbb{N}} (-\delta h)^n \sum_{m \in \mathbb{N}} (-h\delta)^m i = p \sum_{n+m=p} (-\delta h)^n (-h\delta)^m i = id_U$$

en raison des conditions de bord (2.5.1d). Ces conditions sur h, i, p impliquent les mêmes conditions sur $\tilde{h}, \tilde{i}, \tilde{p}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{h}^2 &= (id + h\delta)^{-1} h \circ h (id + \delta h)^{-1} = 0 \\
\tilde{h} \circ \tilde{i} &= (id + h\delta)^{-1} h \circ (id + h\delta)^{-1} i = (id + h\delta)^{-1} \circ h \circ i = 0 \\
\tilde{p} \circ \tilde{h} &= p (id + \delta h)^{-1} \circ h (id + \delta h)^{-1} = p \circ h \circ (id + \delta h)^{-1} = 0
\end{aligned}$$

□

2.5.1 Cohomologie à deux degrés

Soit (\mathcal{A}, μ) une algèbre associative, $\mathfrak{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}^n$ l'espace des cochaînes de Hochschild associé et \mathfrak{a} sa cohomologie.

On suppose pour commencer que la cohomologie est concentrée seulement sur deux degrés $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}^1$. Du point de vue décalé pour travailler avec des algèbres de Lie graduées, $\mathcal{G} := \mathfrak{A}[1]$ et $\mathfrak{g} := \mathfrak{a}[1]$, et la cohomologie se ré-écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0$. On reprend les notations \overline{d} et $\overline{b+D}$ de la Section 2.2 pour les différentielles induites par les crochets décalés, et on construit ordre par ordre la structure L_{∞} perturbée $\overline{d'}$ sur \mathfrak{g} pour obtenir un morphisme L_{∞} entre $(\mathfrak{g}, \overline{d'})$ et $(\mathcal{G}, \overline{b+D})$.

Tout d'abord, le lemme suivant limite la « longueur » de ϕ .

Lemme 2.5.5 *Sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0$, une application $\phi_k : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ de degré $1 - k$ est nulle pour $k \geq 3$.*

Preuve. En commençant avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0$, comme ϕ_1 est une application de degré 0 on a

$$\phi_1(\mathfrak{g}^{-1}) \subset \mathcal{G}^{-1} = \mathfrak{A}^0 \quad \text{et} \quad \phi_1(\mathfrak{g}^0) \subset \mathcal{G}^0 = \mathfrak{A}^1.$$

De la même façon, ϕ_2 est une application de degré -1 d'où

$$\begin{aligned} \phi_2(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-1}) &\subset \mathcal{G}^{-3} = \mathfrak{A}^{-2} = \{0\} \\ \phi_2(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^0) &\subset \mathcal{G}^{-2} = \mathfrak{A}^{-1} = \{0\} \\ \phi_2(\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0) &\subset \mathcal{G}^{-1} = \mathfrak{A}^0. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, ϕ_k est une application de degré $1 - k$ d'où

$$\phi_k(\mathfrak{g}^{i_1}, \dots, \mathfrak{g}^{i_k}) \subset \mathcal{G}^{i_1 + \dots + i_k + 1 - k}$$

et comme $-1 \leq i_1, \dots, i_k \leq 0$, on a $i_1 + \dots + i_k + 1 - k \leq 1 - k \leq -2$ pour $k \geq 3$ donc $\phi_k = 0$ pour $k \geq 3$. \square

Ainsi, l'application ϕ est de la forme $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

Théorème 2.5.6 *Il existe une structure L_{∞} de la forme $\overline{d'} = \overline{d_2 + d_3}$ qui munit $(\mathfrak{g}, \overline{d'})$ d'une structure d'algèbre L_{∞} , et un morphisme L_{∞} entre les algèbres $(\mathfrak{g}, \overline{d'})$ et $(\mathcal{G}, \overline{b+D})$ noté $\overline{\phi} : \mathcal{S}(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G}[1])$, i.e. qui satisfait à $\overline{b+D} \overline{\phi} = \overline{\phi} \overline{d'}$. De plus, la restriction de $d_3 : \mathcal{S}^3(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathfrak{g}[1]$ à $\mathcal{S}^3(\mathfrak{g}[1])^{-1}$ est un 3-cocycle de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de \mathfrak{g}^0 à valeurs dans \mathfrak{g}^{-1} .*

Preuve. On note $\overline{E} := \overline{b+D} \overline{\phi} - \overline{\phi} \overline{d'}$ et $\overline{F} = \overline{d'}^2$. Comme $|\overline{b+D}| = 1$ et $|\overline{\phi}| = 0$, on a $|d'| = 1$ et puisque $\phi = \phi_1 + \phi_2$, on a $d' = d_2 + d_3$. Comme $\overline{b+D}$ et $\overline{d'}$ sont des codérivations graduées et $\overline{\phi}$ est un morphisme de cogèbres graduées, \overline{E} est une codérivation le long de $\overline{\phi}$, donc $\overline{E} = \overline{\phi} \star E$. De plus, $\overline{b+D}^2 = 0$ implique que

$$\overline{b + D} \overline{E} + \overline{E} \overline{d'} + \overline{\phi} \overline{F} = 0. \quad (2.5.3)$$

On veut construire ϕ et d' tels que \overline{E} et \overline{F} s'annulent. Par projection, on a

$$\overline{E} = 0 \Leftrightarrow E := \text{pr}_{\mathcal{G}[1]} \overline{E} = 0, \quad \overline{F} = 0 \Leftrightarrow F := \text{pr}_{\mathcal{G}[1]} \overline{F} = 0. \quad (2.5.4)$$

De plus, les différents morphismes sont déterminés par leurs restrictions, par exemple E est déterminé par les applications $E_k : \mathcal{S}^k(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathcal{G}[1]$.

On sait déjà que puisque $d' : \mathcal{S}^{\geq 2} \mathfrak{g}[1] \rightarrow \mathcal{G}[1]$, F prend au moins trois arguments donc $F_1 := F|_{\mathcal{S}^1 \mathfrak{g}[1]} = 0$ et $F_2 := F|_{\mathcal{S}^2 \mathfrak{g}[1]} = 0$.

On projette l'équation (2.5.3) sur $\mathcal{G}[1]$ ce qui donne

$$(b + D) \circ_{NR} E + E \circ_{NR} d' + \phi \circ_{NR} F = 0$$

et on l'évalue sur n arguments.

$n = 1$ Comme $D = D_2 : \mathcal{S}^2(\mathcal{G}[1]) \rightarrow \mathcal{G}[1]$ et $d = d_2 : \mathcal{S}^2(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathfrak{g}[1]$ prennent deux arguments, le seul terme restant est $bE_1 = 0$.

D'après la définition de E , E_1 s'écrit $E_1 = b\phi_1$.

Comme on doit avoir $\phi_1(\mathfrak{g}^{-1}) \subset Z\mathfrak{A}^0$ et $\phi_1(\mathfrak{g}^0) \subset Z\mathfrak{A}^1 = \text{Der}(\mathcal{A})$, avec $\mathfrak{A}^0 = \mathcal{A}$, on choisit une injection linéaire $\phi_1 : \mathfrak{g} \rightarrow Z\mathcal{G}$ telle que $p\phi_1 = id_{\mathfrak{g}}$, ainsi $E_1 = b\phi_1 = 0$.

$n = 2$ On a $b\overline{E}_2 + D\overline{E}_2 + E d_2 + \phi_1 \overline{F}_2 = 0$. Comme $E_1 = 0$, $\overline{E}_2 = E_2$ et puisque $D = D_2$ prend deux arguments et E_2 n'en donne qu'un, et puisque d_2 donne un argument à E et $E_1 = 0$, il ne reste que $bE_2 = 0$. Le terme E_2 s'écrit $E_2 = b\phi_2 + b\overline{\phi_1}|_2 + D\overline{\phi_1}|_2 - \phi_1 d_2$. Par définition de D_2 , d_2 et la projection $p : Z\mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}$, $p(D\overline{\phi_1}|_2 - \phi_1 d_2) = pD\overline{\phi_1}|_2 - d_2 = 0$ donc $D\overline{\phi_1}|_2 - \phi_1 d_2$ est un cobord. On peut alors choisir ϕ_2 telle que $E_2 = 0$. L'application $\phi_2 : \mathcal{S}^2(\mathfrak{g}^0) \rightarrow \mathcal{G}^{-1} = \mathcal{A}$ est définie à cobord près, si une autre application ϕ'_2 est choisie, on a $\text{Ker } b \ni \chi_2 = \phi'_2 - \phi_2 : \mathcal{S}^2(\mathfrak{g}^0) \rightarrow Z(\mathcal{A})$.

$n = 3$ On a $b\overline{E}_3 + D\overline{E}_3 + E_1 d_3 + \phi_1 \overline{F}_3 = 0$. À nouveau, $E_1 = E_2 = 0$ et $F_1 = F_2 = 0$ implique que $\overline{E}_3 = E_3$ et $\overline{F}_3 = F_3$. Comme on a une somme directe $Z\mathcal{G} = \text{Im } \phi_1 \oplus \text{Im } b$, $bE_3 + \phi_1 F_3 = 0 \Leftrightarrow bE_3 = \phi_1 F_3 = 0$. L'application ϕ_1 est injective, donc $F_3 = 0$. En utilisant le Lemme 2.5.5, le terme E_3 s'écrit $E_3 = b\phi_3 + D_2 \overline{\phi} - \phi_1 d_3 - \phi_2 \overline{d}_2$.

On définit $\alpha : \mathcal{S}^3(\mathfrak{g}^0) \rightarrow \mathfrak{g}^{-1}$, $|\alpha| = 1$, par $\alpha = D_2 \overline{\phi} - \phi_2 \overline{d}_2$.

Comme $0 = bE_3 = b\alpha - b\phi_1 d_3 = b\alpha$, α prend ses valeurs dans $Z(\mathcal{A}) = \phi_1(\mathfrak{g}[1]^{-1}) \subset \mathfrak{A}^0$. Ainsi la relation $D_2 \overline{\phi} - \phi_2 \overline{d}_2 =: \phi_1 d_3$ définit l'application d_3 telle que $E_3 = 0$.

$n \geq 4$ L'application E est de degré $|E| = 1$. Un raisonnement sur le degré dans $\mathfrak{g}[1] = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ comme dans le Lemme 2.5.5, permet d'obtenir $E_n = 0$ et aussi $F_n = 0$, pour $n \geq 4$.

En particulier, on a $0 = d'\bar{d}'_4$, donc

$$0 = (d_2 + d_3)(\bar{d}_2 + \bar{d}_3) = \underbrace{d_2\bar{d}_2|_4}_{=0} + d_2\bar{d}_3|_4 + d_3\bar{d}_2|_4 + \underbrace{d_3\bar{d}_3|_4}_{=0},$$

d'où $d_2\bar{d}_3|_4 + d_3\bar{d}_2|_4 = 0$.

Ainsi, on a $0 = d_2\bar{d}_3 + d_3\bar{d}_2 = d_2 \circ_{NR} d_3 + d_3 \circ_{NR} d_2 = [d_2, d_3]_{NR}$.

Calculant sur des arguments $y_i \in \mathfrak{g}[1]^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} d_2\bar{d}_3(y_0 \bullet y_1 \bullet y_2 \bullet y_3) &= d_2(d_3 \star id)(y_0 \bullet y_1 \bullet y_2 \bullet y_3) \\ &= d_2\mu_{sh}(d_3 \otimes id)(\text{pr}_3 \otimes \text{pr})\Delta_{sh}(y_0 \bullet y_1 \bullet y_2 \bullet y_3) \\ &= d_2(d_3(y_0 \bullet y_1 \bullet y_2) \bullet y_3) - d_2(d_3(y_0 \bullet y_1 \bullet y_3) \bullet y_2) \\ &\quad + d_2(d_3(y_0 \bullet y_2 \bullet y_3) \bullet y_1) - d_2(d_3(y_1 \bullet y_2 \bullet y_3) \bullet y_0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_3\bar{d}_2(y_0 \bullet y_1 \bullet y_2 \bullet y_3) &= d_3(d_2 \star id)(y_0 \bullet y_1 \bullet y_2 \bullet y_3) \\ &= d_3\mu_{sh}(d_2 \otimes id)(\text{pr}_2 \otimes \text{pr})\Delta_{sh}(y_0 \bullet y_1 \bullet y_2 \bullet y_3) \\ &= d_3(d_2(y_0 \bullet y_1) \bullet y_2 \bullet y_3) - d_3(d_2(y_0 \bullet y_2) \bullet y_1 \bullet y_3) \\ &\quad + d_3(d_2(y_0 \bullet y_3) \bullet y_1 \bullet y_2) + d_3(d_2(y_1 \bullet y_2) \bullet y_0 \bullet y_3) \\ &\quad - d_3(d_2(y_1 \bullet y_3) \bullet y_0 \bullet y_2) + d_3(d_2(y_2 \bullet y_3) \bullet y_0 \bullet y_1). \end{aligned}$$

Notant $\sigma := \mathfrak{g}^{0 \wedge 3} \rightarrow \mathfrak{g}^0$ tel que $d_3 = \sigma[1]$ et en considérant la représentation adjointe $\rho(x) = ad_x = [x, \]_s$, on a

$$\begin{aligned} \delta_{CE}^3 \sigma(x_0, x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^3 \rho(x_i)(\sigma(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_3)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (-1)^{i+j} \sigma([x_i, x_j]_s, x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_3) \\ &= -[d_2, d_3]_{NR}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \end{aligned}$$

Ceci montre que $d_3[-1] = \sigma$ est un 3-cocycle de \mathfrak{g}^0 à valeurs dans $Z(\mathcal{A}) = \mathfrak{g}^{-1}$. \square

2.5.2 Résultat général

La construction d'une différentielle perturbée pour obtenir une nouvelle contraction entre les algèbres L_∞ est faite par récurrence dans [Hue11], Bordemann propose dans [Bor] une formulation fermée.

Théorème 2.5.7 *Soient (V, b) un complexe différentiel et H sa cohomologie. Supposons qu'il existe une contraction*

$$H \begin{array}{c} \xleftarrow{\phi_1} \\ \xleftarrow{\pi_1} \end{array} (V, b) \quad \curvearrowright h$$

et que D soit une perturbation de b , autrement dit que $(V, \overline{b+D})$ soit une algèbre L_∞ . Alors il existe une contraction entre cogèbres symétriques cocommutatives graduées

$$(\mathcal{S}(H[1]), \overline{d}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \\ \xleftarrow{\overline{\psi}} \end{array} (\mathcal{S}(V[1]), \overline{b+D}) \quad \curvearrowright \eta$$

avec l'homotopie η vérifiant $\eta \circ \overline{b+D} \circ \eta = \eta$. De plus, en notant $\varphi_1 = \phi_1[1]$ et $\psi_1 = \pi_1[1]$, les applications \overline{d} , $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$ sont des morphismes de cogèbres graduées et sont entièrement déterminées par les formules

$$\overline{d} = \overline{\psi}_1 \circ (\text{id}_{\mathcal{S}(V[1])} + \overline{D} \circ \eta)^{-1} \circ \overline{D} \circ \overline{\varphi}_1, \quad (2.5.5)$$

$$\overline{\varphi} = (\text{id}_{\mathcal{S}(V[1])} + \eta \circ \overline{D})^{-1} \circ \overline{\varphi}_1, \quad (2.5.6)$$

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}_1 \circ (\text{id}_{\mathcal{S}(V[1])} + \overline{D} \circ \eta)^{-1}. \quad (2.5.7)$$

Ceci comprend en particulier le fait que $\overline{\varphi}$ est un morphisme L_∞ vérifiant

$$\overline{b+D} \circ \overline{\varphi} = \overline{\varphi} \circ \overline{d}.$$

L'application η est définie de la façon suivante. On pose $W := \text{Im } b \oplus \text{Im } h$, alors $V = H \oplus W$ donc $\mathcal{S}(V[1]) \cong \mathcal{S}(H[1]) \otimes \mathcal{S}(W[1])$. Soient $y_1 \bullet \cdots \bullet y_k \in \mathcal{S}(H[1])$ et $w_1 \bullet \cdots \bullet w_l \in \mathcal{S}(W[1])$. Alors

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{S}(H[1]) \otimes \mathcal{S}(W[1]) &\rightarrow \mathcal{S}(V[1]) \\ \eta(y_1 \bullet \cdots \bullet y_k \bullet w_1 \bullet \cdots \bullet w_l) &= \begin{cases} \overline{h}(y_1 \bullet \cdots \bullet y_k \bullet \frac{1}{l} w_1 \bullet \cdots \bullet w_l) & \text{si } l \neq 0, \\ 0 & \text{si } l = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

où \overline{h} est la codérivation induite par h .

Corollaire 2.5.8 *Sous les hypothèses du théorème précédent, supposons qu'il existe une autre contraction de complexes différentiels*

$$H' \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi'_1} \\ \xleftarrow{\pi'_1} \end{array} (V, b) \quad \curvearrowright h'.$$

Alors les deux structures L_∞ sur (H, \overline{d}) et (H', \overline{d}') sont dans la même classe de conjugaison, i.e. il existe un isomorphisme de cogèbres $\overline{S} : \mathcal{S}(H'[1]) \rightarrow \mathcal{S}(H[1])$ tel que

$$\overline{d}' = \overline{S}^{-1} \circ \overline{d} \circ \overline{S}. \quad (2.5.9)$$

Preuve. Par restrictions, comme $\overline{\psi}'_1 = \psi'_1 = \pi'_1[1]$ induit un isomorphisme $H'[1] \rightarrow H'[1]$ et que $\overline{\varphi}_1 = \varphi_1$ induit un isomorphisme $H[1] \rightarrow H[1]$, il vient que $(\overline{\psi}' \circ \overline{\varphi})|_1 = \psi'_1 \varphi_1$ est un isomorphisme, ce qui entraîne que $\overline{\psi}' \circ \overline{\varphi}$ est inversible d'après le Lemme 2.5.9 ci-dessous.

D'autre part, on a

$$\overline{\psi}' \circ \overline{\varphi} \circ \overline{d} = \overline{\psi}' \circ \overline{b+D} \circ \overline{\varphi} = \overline{d'} \circ \overline{\psi}' \circ \overline{\varphi}$$

donc

$$\overline{d'} = \overline{\psi}' \circ \overline{\varphi} \circ \overline{d} \circ (\overline{\psi}' \circ \overline{\varphi})^{-1}$$

et $\overline{S} := \overline{\psi}' \circ \overline{\varphi}$ convient. \square

Il reste à montrer le lemme pour l'inversibilité.

Lemme 2.5.9 *Soit $\overline{\varphi} : \mathcal{S}(U) \rightarrow \mathcal{S}(V)$ un morphisme de cogèbres graduées tel que $\varphi_1 : U \rightarrow V$ est un isomorphisme. Alors $\overline{\varphi}$ est inversible.*

Preuve. Posons $\varphi = \varphi_1 + \varphi'$ avec $\varphi' = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k$ où $\varphi_k : \mathcal{S}^k(U) \rightarrow V$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} &= e^{\tilde{\star}\varphi} = e^{\tilde{\star}(\varphi_1 + \varphi')} \\ &= e^{\tilde{\star}\varphi_1} \tilde{\star} e^{\tilde{\star}\varphi'} \\ &= \underbrace{\overline{\varphi}_1 \tilde{\star} \left(e^{\tilde{\star}\varphi'} - \mathbf{1}_{SV} \varepsilon_{SU} \right)}_{\text{loc. nil.}} + \overline{\varphi}_1, \end{aligned}$$

avec le premier terme localement nilpotent. On obtient

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_1 \circ \left(id_{\mathcal{S}U} + \overline{\varphi}_1^{-1} \left(\overline{\varphi}_1 \tilde{\star} \left(e^{\tilde{\star}\varphi'} - \mathbf{1}_{SV} \varepsilon_{SU} \right) \right) \right)$$

puisque

$$\begin{aligned} \text{pr}_U \overline{\varphi}_1^{-1} \circ \overline{\varphi}_1 &= \varphi_1^{-1} \text{pr}_V \overline{\varphi}_1 = \varphi_1^{-1} \varphi_1 \text{pr}_U = \text{pr}_U \\ \text{pr}_V \overline{\varphi}_1 \circ \overline{\varphi}_1^{-1} &= \varphi_1 \text{pr}_U \overline{\varphi}_1^{-1} = \varphi_1 \varphi_1^{-1} \text{pr}_V = \text{pr}_V, \end{aligned}$$

et donc

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_1 \circ \left(id_{\mathcal{S}U} + id_{\mathcal{S}U} \tilde{\star} \left(e^{\tilde{\star}\varphi_1^{-1}\varphi'} - \mathbf{1}_{SU} \varepsilon_{SU} \right) \right).$$

Ainsi, l'application suivante est bien définie,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}^{-1} &= \left(id_{\mathcal{S}U} + id_{\mathcal{S}U} \tilde{\star} \left(e^{\tilde{\star}\varphi_1^{-1}\varphi'} - \mathbf{1}_{SU} \varepsilon_{SU} \right) \right)^{-1} \circ \overline{\varphi}_1^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(id_{\mathcal{S}U} \tilde{\star} \left(e^{\tilde{\star}\varphi_1^{-1}\varphi'} - \mathbf{1}_{SU} \varepsilon_{SU} \right) \right)^k \circ \overline{\varphi}_1^{-1}, \end{aligned}$$

c'est l'inverse de $\overline{\varphi}$. \square

ÉTUDE DE LA FORMALITÉ POUR LES ALGÈBRES LIBRES

SOMMAIRE

3.1	DESCRIPTION DES ESPACES	48
3.1.1	Définitions	48
3.1.2	Exemples en dimension 0 et 1	49
3.1.3	Résultats en dimension plus grande que 2	50
3.1.4	Cas d'un espace de dimension finie	57
3.2	FORMALITÉ PERTURBÉE	59
3.2.1	Calculs pour la partie cocycle dans le cas 1	59
3.2.2	Calculs pour la partie cocycle dans le cas 2	60
3.2.3	Calculs pour la partie cobord dans le cas 1	61
3.2.4	Calculs pour la partie cobord dans le cas 2	64

ON étudie la formalité pour une algèbre libre sur un espace vectoriel. On rappelle quelle est sa cohomologie, puis on montre qu'il y a formalité pour des espaces de dimension 0 et 1. En dimension plus grande, on expose les équations de formalité, et on prouve finalement qu'elles ne peuvent être vérifiées. Au passage, on présente (en dimension finie) la cohomologie comme le noyau d'une application de forme trace. Le calcul d'une structure L_∞ perturbée donne une composante supplémentaire d'arité 3 à la différentielle induite par le crochet de Schouten (d'arité 2) et induit un morphisme L_∞ dont seule les deux premières composantes sont non nulles.

3.1 DESCRIPTION DES ESPACES

Soit \mathbb{K} un corps et V un \mathbb{K} -espace vectoriel. On considère l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}(V)$ engendrée par V . Son algèbre enveloppante est isomorphe à l'algèbre libre sur V (voir [Jac62]), soit

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}(V)) \cong TV.$$

Dans la suite de ce chapitre, on travaillera directement avec l'algèbre libre TV .

3.1.1 Définitions

On considère l'algèbre libre $\mathcal{A} := TV$ engendrée par V , définie par

$$TV := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k} =: \bigoplus_{k=0}^{\infty} TV^k \quad (3.1.1)$$

où $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$, and $V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$ (k fois).

La cohomologie de Hochschild de TV à valeurs dans un bimodule \mathcal{M} peut être calculée en utilisant une résolution libre de TV , déjà connue dans [CE56, Chap. IX p. 181], pour un calcul détaillé, voir par exemple [Hof07, Chap. 5, Prop. 5.3.2].

Théorème 3.1.1 *Pour $k \in \mathbb{N}$, le k -ième groupe de cohomologie de Hochschild TV est donné par*

$$H_{\text{H}}^k(TV, \mathcal{M}) = \begin{cases} \mathcal{M}^{TV} := \{m \in \mathcal{M}, \forall a \in TV, am = ma\} & \text{si } k = 0, \\ H_{\text{H}}^1(TV, \mathcal{M}) & \text{si } k = 1, \\ \{0\} & \text{si } k \geq 2. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Prenons $\mathcal{M} = TV$ comme bimodule. Alors TV^{TV} est le centre de TV ,

$$TV^{TV} = \begin{cases} TV & \text{si } \dim V = 0 \text{ ou } \dim V = 1, \\ \mathbb{K}\mathbf{1} = TV^0 & \text{si } \dim V \geq 2. \end{cases}$$

On remarque que pour $\dim V = 0$, $TV \cong \mathbb{K}$ et pour $\dim V = 1$, $V = \mathbb{K}x$ et $TV \cong \mathbb{K}[x]$.

Proposition 3.1.2 *Pour la cohomologie de Hochschild de TV , les 1-cocycles et les 1-cobords sont de la forme suivante.*

$$\begin{aligned} Z\mathcal{A}^1(TV, TV) &= \text{Der}(TV, TV) \\ &:= \{\varphi \in \text{Hom}(TV, TV), \varphi(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b)\} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

et

$$\begin{aligned} B\mathfrak{A}^1(TV, TV) &= \text{Inder}(TV, TV) \\ &:= \{\varphi \in \text{Hom}(TV, TV), \exists c \in TV, \forall a \in TV, \varphi(a) = ca - ac\}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

On remarque que pour $\dim V \leq 1$, $B\mathfrak{A}^1(TV, TV) = \{0\}$.

3.1.2 Exemples en dimension 0 et 1

Soit $\mathcal{A} = T\{0\} = \mathbb{K}$.

Proposition 3.1.3 *Le complexe de Hochschild associé à l'algèbre \mathcal{A} est formel avec $\phi_1 = id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathfrak{A}^0 \cong \mathbb{K}$ et $\phi_k = 0$ pour $k \geq 2$.*

Preuve. On a $\mathfrak{A}^k = \text{Hom}(\mathbb{K}^{\otimes k}, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ pour tout k et $[\cdot, \cdot]_G = 0$,

$$b : \mathfrak{A}^k \rightarrow \mathfrak{A}^{k+1} = \begin{cases} id_{\mathbb{K}} & \text{si } k = 2r + 1, r \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } k = 2r, r \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et donc

$$\mathfrak{a}^k = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

□

Soit $\mathcal{A} = T(\mathbb{K}x) \cong \mathbb{K}[x]$ l'anneau des polynômes en une variable.

Proposition 3.1.4 *Le complexe de Hochschild associé à l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{K}[x]$ est formel.*

Preuve. On a

$$\mathfrak{a}^0 = \mathcal{A}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^1 &= \text{Der}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) / \text{Inder}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \text{Der}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \\ &= \text{Hom}(\mathbb{K}, \mathcal{A}) \\ &= \{f \partial_x, f \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

Soit $\phi_1|_{\mathfrak{a}^0} = id_{\mathcal{A}}$ et $\phi_1|_{\mathfrak{a}^1} : \mathfrak{a}^1 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ la fonction qui à $f \partial_x$ associe sa dérivation, injectant la cohomologie comme sous-algèbre du complexe. Alors

$$\phi_1([x, y]_s) = [\phi_1(x), \phi_1(y)]_G$$

et avec $\phi_k = 0$ pour $k \geq 2$, le complexe de Hochschild associé à l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{K}[x]$ est formel. □

3.1.3 Résultats en dimension plus grande que 2

On suppose que $\dim V \geq 2$.

On a déjà calculé

$$H_H^0(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) = \mathcal{T}V^{\mathcal{T}V} = \mathfrak{a}^0 \cong \mathbb{K}\mathbf{1}.$$

On va considérer une autre description de

$$H_H^1(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) = \text{Der}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) / \text{Inder}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V).$$

Les cocycles sont des dérivations de $\mathcal{T}V$, qui peuvent aussi être vues comme des applications de V dans $\mathcal{T}V$,

$$\text{Der}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) \cong \text{Hom}(V, \mathcal{T}V). \quad (3.1.5)$$

En effet, toute dérivation de $\mathcal{T}V$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur le sous-espace générateur $\mathcal{T}V^1 = V$. Réciproquement, chaque $\psi \in \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$ détermine de manière unique une dérivation $\bar{\psi}$ de $\mathcal{T}V$ par

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\mathbf{1}) &:= 0 \\ \bar{\psi}(v_1 \cdots v_k) &:= \sum_{r=1}^k v_1 \cdots v_{r-1} \psi(v_r) v_{r+1} \cdots v_k. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Restreinte à $\mathcal{T}V$, la différentielle b n'est autre que l'opérateur adjoint,

$$\begin{aligned} b : \mathcal{T}V &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) \\ x &\mapsto ad_x := [x, \cdot] \end{aligned}$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur usuel. On considère l'application $\tilde{b} : \mathcal{T}V \rightarrow \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$, où l'adjoint ne prend ses valeurs que dans V . Ceci permet de voir les cobords $B\mathfrak{A}^1 = \text{Inder}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) \cong \tilde{b}\mathcal{T}V^+$ comme un sous-espace de $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$: on prend les dérivations adjointes provenant des éléments de $\mathcal{T}V^+$, mais vues comme des applications de $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$. On peut noter que $\bar{\tilde{b}} = b$.

On a obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.1.5 *Pour $\dim V \geq 2$, la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{T}V$ est*

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}^1 \\ &= \mathcal{T}V^{\mathcal{T}V} \oplus \text{Der}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) / \text{Inder}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V) \\ &= \mathbb{K}\mathbf{1} \oplus \text{Hom}(V, \mathcal{T}V) / \tilde{b}\mathcal{T}V^+. \end{aligned}$$

La cohomologie de $\mathcal{T}V$ se concentre en deux degrés, donc d'après le Théorème 2.5.6, il existe une structure L_∞ sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[1]$ de la forme $d_2 + d_3$, avec d_3 un 3-cocycle de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de \mathfrak{g} . Dans la suite, on va montrer que le complexe de Hochschild associé à $\mathcal{T}V$ n'est pas formel pour la structure L_∞ naturelle, et expliciter le terme d_3 .

On va travailler avec l'espace $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$ plutôt que $\text{Der}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V)$, c'est une sous-algèbre de Lie de $\text{Hom}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}V)$ munie du crochet $[\ ,]_D$: pour $\psi, \chi \in \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$, $[\psi, \chi]_D := \bar{\psi}\chi - \bar{\chi}\psi$, où $\bar{\psi}$ et $\bar{\chi}$ sont des dérivations de $\mathcal{T}V$ comme en (3.1.6).

Il y a une autre \mathbb{Z} -gradation de $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$ selon le degré

$$\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)^k = \text{Hom}(V, V^{\otimes k+1}),$$

cette gradation est auxiliaire, sans signes. Comme on considère la cohomologie décalée

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}[1] &= \mathfrak{a}[1]^{-1} \oplus \mathfrak{a}[1]^0 \\ &= \mathbb{K}1 \oplus \text{Hom}(V, \mathcal{T}V) / \tilde{b}\mathcal{T}V^+, \end{aligned}$$

les éléments de $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V) / \tilde{b}\mathcal{T}V^+$ sont tous de degré 0 pour la première gradation ; on peut ainsi noter sans ambiguïté $||$ la gradation auxiliaire de $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$.

L'espace $B\mathcal{G}^0 \cong \mathcal{T}V^+$ est aussi gradué par le degré de $\mathcal{T}V^+$, $B\mathcal{G}^{0k} \cong V^{\otimes k}$ pour $k \geq 1$. On a

$$\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)^{-1} = \text{Hom}(V, \mathbb{K}) = V^\star, \quad (3.1.7)$$

$$B\mathcal{G}^{0^{-1}} = \{0\},$$

$$\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)^0 = \text{Hom}(V, V), \quad (3.1.8)$$

$$B\mathcal{G}^{0^0} = \{0\}.$$

Voici quelques exemples de crochets de Lie de $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$ qui seront utilisés plus tard.

Exemple 3.1.6 Soient $\alpha, \beta \in \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)^{-1} = V^\star$, $A, B \in \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)^0 = \text{Hom}(V, V)$, et $\psi \in \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)$, alors on a

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]_D &= 0 \quad \text{puisque de degré } -2 \text{ (car } [\ ,]_D \text{ est de degré } 0), \\ [\alpha, \psi]_D &= \bar{\alpha}\psi, \\ [A, \psi]_D &= \bar{A}\psi - \psi A, \\ [A, B]_D &= AB - BA = [A, B]. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

De plus, comme $\tilde{b} = ad$, pour $v, x, y \in TV$,

$$\begin{aligned} \tilde{b}v &= ad_v, \\ [\psi, ad_v]_D &= ad_{\tilde{\psi}(v)} = \tilde{b}\overline{\psi}(v), \\ [ad_x, ad_y]_D &= ad_{[x,y]} = \tilde{b}[x,y]. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{-1} &= V^\star, \\ \mathcal{H}^0 &= \text{Hom}(V, V), \end{aligned}$$

et pour $k \geq 1$, on choisit dans chaque $\text{Hom}(V, V^{\otimes k+1})$ un supplémentaire des dérivations intérieures, *i.e.* $\text{Hom}(V, V^{\otimes k+1}) = \mathcal{H}^k \oplus B\mathcal{G}^{0k}$. On dénote par $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq -1} \mathcal{H}^n$ le supplémentaire gradué de $B\mathcal{G}^0 = \tilde{b}TV^+$. Soit

$$P_k : \text{Hom}(V, V^{\otimes k+1}) \rightarrow \mathcal{H}^k \tag{3.1.11}$$

la projection canonique, et pour $k \geq 1$, soit

$$Q_k : \text{Hom}(V, V^{\otimes k+1}) \rightarrow V^{\otimes k} \tag{3.1.12}$$

l'application canonique telle que $id - P_k = \tilde{b}Q_k$. On pose $Q_{-1} = Q_0 = 0$. Soient $P = \sum_{k \geq -1} P_k$, $Q = \sum_{k \geq 1} Q_k$. On remarque que pour $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, $P([x_1, x_2]_D) =: [x_1, x_2]_s$, s'identifie au crochet de Schouten.

En fait, munie du crochet $[\cdot, \cdot]_D$, $\mathfrak{A}_{\text{red}} := TV \oplus \text{Hom}(V, TV)$ est une sous-algèbre de Lie graduée du complexe de Hochschild $\mathfrak{A} := C_H(TV, TV)$ et on a une contraction

$$(\mathfrak{A}_{\text{red}}, \tilde{b}) \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{P} \end{array} (\mathfrak{A}, b) \quad \curvearrowright \mathcal{Q},$$

car $id - P = \tilde{b}Q$. On poursuit ici le raisonnement sans utiliser le Théorème 2.5.7.

Soit $\phi_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ la section correspondant à la décomposition précédente. Comme $\phi_1(\mathfrak{g}^{-1} = \mathbb{K}\mathbf{1}) \subset \mathcal{G}^{-1}$ et $b\phi_1(\mathbf{1}) = 0$, il s'ensuit que pour tout $a \in TV$, $a\phi_1(\mathbf{1}) - \phi_1(\mathbf{1})a = 0$ donc $\phi_1(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ car $p(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Pour étudier la formalité du complexe de Hochschild associé à TV , on doit vérifier l'équation (2.2.8) pour $0 \leq k \leq 2$. À l'ordre $k = 0$, on voit que l'équation (2.2.4) est vérifiée par construction. À l'ordre $k = 1$, on a l'équation (2.2.5)

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{a}[1], \phi_1([\xi_1, \xi_2]_s) = b\phi_2(\xi_1, \xi_2) + [\phi_1(\xi_1), \phi_1(\xi_2)]_G$$

qui s'annule des deux côtés si l'un des ξ_i est dans $\mathfrak{g}^{-1} = \mathbb{K}\mathbf{1}$. Pour alléger les calculs, on travaille dans \mathcal{H} plutôt que $\text{Hom}(V, TV)/\tilde{b}TV^+$. Pour $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, l'équation vue dans $\text{Hom}(V, TV)$ devient

$$P([x_1, x_2]_D) = \tilde{b}(\phi_2(x_1, x_2)) + [x_1, x_2]_D \quad (3.1.13)$$

d'où

$$\phi_2(x_1, x_2) = -Q([x_1, x_2]_D) + q(x_1, x_2)\mathbf{1} \quad (3.1.14)$$

où $q : \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ est arbitraire, puisque $\tilde{b}(q(x_1, x_2)\mathbf{1}) = 0$.

Regardons à l'ordre $k = 2$. Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$. Si le complexe de Hochschild associé à TV était formel, comme $\phi_3 = 0$ l'équation (2.2.9) serait

$$\bigcirc_{x_1, x_2, x_3} [\phi_2(P[x_1, x_2]_D, x_3) - \bar{x}_1(\phi_2(x_2, x_3))] = 0$$

En revanche, en utilisant l'équation (3.1.14), on obtient

$$\begin{aligned} & \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} [\phi_2(P[x_1, x_2]_D, x_3) - \bar{x}_1(\phi_2(x_2, x_3))] \\ &= \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} [-Q([P[x_1, x_2]_D, x_3]_D) + q(P[x_1, x_2]_D, x_3) + \bar{x}_1(Q[x_2, x_3]_D)] \quad (3.1.15) \\ &=: T(x_1, x_2, x_3) \in TV \end{aligned}$$

Montrons que cet élément est un scalaire, pour cela, on va calculer que $\tilde{b}(T(x_1, x_2, x_3)) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{b}(T(x_1, x_2, x_3)) &= \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \tilde{b}(q(P[x_1, x_2]_D, x_3) - Q([P[x_1, x_2]_D, x_3]_D)) + \tilde{b}(\bar{x}_1(Q[x_2, x_3]_D)) \\ &= \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} [(P - id)([P[x_1, x_2]_D, x_3]_D) + \tilde{b}(\bar{x}_1(Q[x_2, x_3]_D))] \end{aligned}$$

car $\text{Im } q \subset \text{Ker } \tilde{b}$ et $\tilde{b}Q = id - P$. De plus, comme pour $v \in V$, $w \in TV$, on a $\tilde{b}\bar{x}_1(w)(v) = [\bar{x}_1(w), v] = \bar{x}_1([w, v]) - [w, \bar{x}_1(v)]$, on obtient

$$\tilde{b}(\bar{x}_1(Q[x_2, x_3]_D))(v) = \bar{x}_1(\tilde{b}(Q[x_2, x_3]_D)(v)) - b(Q[x_2, x_3]_D)(x_1(v)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\bar{x}_1(Q[x_2, x_3]_D)) &= \bar{x}_1 \circ \tilde{b}Q[x_2, x_3]_D - \overline{\tilde{b}Q[x_2, x_3]_D} \circ x_1 \\ &= [x_1, \tilde{b}Q[x_2, x_3]_D]_D \\ &= [x_1, [x_2, x_3]_D]_D - [x_1, P[x_2, x_3]_D]_D. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \tilde{b}T(x_1, x_2, x_3) &= \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \left(P([P[x_1, x_2]_D, x_3]_D) - [P[x_1, x_2]_D, x_3]_D \right. \\ &\quad \left. + [x_1, [x_2, x_3]_D]_D + [P[x_2, x_3]_D, x_1]_D \right) \\ &= \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} ([x_1, x_2]_s, x_3]_s + [x_1, [x_2, x_3]_D]_D) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en utilisant l'identité de Jacobi pour les crochets de Lie $[\cdot, \cdot]_s$ et $[\cdot, \cdot]_D$, les autres termes se compensant par sommation circulaire.

Ainsi, puisque $\mathcal{T}V = \mathcal{T}V^+ \oplus \text{Ker } \varepsilon$ où ε est la counité de $\mathcal{T}V$, et que $\mathbb{K} \ni T(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon(T(x_1, x_2, x_3))$, l'équation (3.1.15) devient

$$\begin{aligned} & \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} [\phi_2(P[x_1, x_2]_D, x_3) - \overline{x_1}(\phi_2(x_2, x_3))] \\ &= \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} [q([x_1, x_2]_s, x_3) + \varepsilon(\overline{x_1}(Q[x_2, x_3]_D))]. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Dans l'équation (3.1.16), le premier terme du membre droit est un 3-cobord scalaire de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de \mathfrak{g} , à un signe près.

Comme Q est une application linéaire homogène de degré 0 (pour la seconde graduation $\text{Hom}(V, \mathcal{T}V) = \bigoplus_{k \geq -1} \text{Hom}(V, V^{\otimes k+1})$), puisque $\text{Im } Q \subset \mathcal{T}V^+ = \bigoplus_{k \geq 1} V^{\otimes k}$, on a

$$\varepsilon(\overline{x_1}(Q[x_2, x_3]_D)) = 0 \text{ si } |x_1| \geq 0 \text{ ou si } |[x_2, x_3]_D| \neq 1. \quad (3.1.17)$$

Ainsi, $\varepsilon(\overline{x_1}(Q[x_2, x_3]_D))$ est a priori non nul si, et seulement si si

Cas 1

$$\begin{aligned} & |x_1| = -1 \quad \text{et} \quad |x_2| = 0 \quad \text{et} \quad |x_3| = 1 \\ \text{ou} & |x_1| = -1 \quad \text{et} \quad |x_2| = 1 \quad \text{et} \quad |x_3| = 0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Cas 2

$$\begin{aligned} & |x_1| = -1 \quad \text{et} \quad |x_2| = -1 \quad \text{et} \quad |x_3| = 2 \\ \text{ou} & |x_1| = -1 \quad \text{et} \quad |x_2| = 2 \quad \text{et} \quad |x_3| = -1 \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

On définit

$$\begin{aligned} \sigma &: \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(Q[x_2, x_3]_D)), \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

où $\text{pr}_{-1} : \text{Hom}(V, \mathcal{T}V) \rightarrow \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)^{-1} = V^\star$ est la projection canonique.

En général, dans l'équation (3.1.16), le cobord $(-\delta_{CE}q)$ ne s'annule pas avec le terme σ . En revanche, on a la propriété suivante pour σ .

Proposition 3.1.7 *σ est un 3-cocycle scalaire de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg \mathfrak{g} .*

Preuve. Il faut vérifier que

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_{CE}\sigma)(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= -\sigma([x_0, x_1]_s, x_2, x_3) + \sigma([x_0, x_2]_s, x_1, x_3) - \sigma([x_0, x_3]_s, x_1, x_2) \\ &\quad - \sigma([x_1, x_2]_s, x_0, x_3) + \sigma([x_1, x_3]_s, x_0, x_2) - \sigma([x_2, x_3]_s, x_0, x_1) \end{aligned}$$

Comme σ et $[,]_s$ sont de degré 0, il en est de même pour $(\delta_{CE}\sigma)$, donc on doit avoir $|x_0| + |x_1| + |x_2| + |x_3| = 0$; sans perte de généralité, on peut supposer que $|x_0| \leq |x_1| \leq |x_2| \leq |x_3|$. Il y a cinq cas à considérer :

Cas 1 $|x_i| \geq 0$ pour $0 \leq i \leq 3$, d'où $|x_i| = 0$ pour $0 \leq i \leq 3$.

On a $(\delta\sigma)(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ puisque $\sigma(y_1, y_2, y_3) = 0$ si $|y_i| = 0$, $1 \leq i \leq 3$.

Cas 2 $|x_0| = -1$, $|x_i| \geq 0$ pour $1 \leq i \leq 3$, donc $|x_1| = 0 = |x_2|$, $|x_3| = 1$.

Cas 3 $|x_0| = -1 = |x_1|$, $|x_2| = 0$, $|x_3| = 2$.

Cas 4 $|x_0| = -1 = |x_1|$, $|x_2| = 1 = |x_3|$.

Cas 5 $|x_0| = |x_1| = |x_2| = -1$, $|x_3| = 3$.

On va montrer que $(\delta_{CE}\sigma)(x_0, x_1, x_2, x_3)$ s'annule dans le troisième cas, les autres étant similaires (sauf le premier, qui est direct).

On note $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$, $x_2 = A$ et $x_3 = \varphi$.

$$\begin{aligned} (\delta_{CE}\sigma)(\alpha, \beta, A, \varphi) &= -\sigma([\alpha, \beta]_D, A, \varphi) + \sigma([\alpha, A]_D, \beta, \varphi) - \sigma([\alpha, \varphi]_s, \beta, A) \\ &\quad - \sigma([\beta, A]_D, \alpha, \varphi) + \sigma([\beta, \varphi]_s, \alpha, A) - \sigma([A, \varphi]_s, \alpha, \beta) \end{aligned}$$

En utilisant les équations (3.1.9), (3.1.10), (3.1.17) puis la décomposition $[x, y]_s = P[x, y]_D = [x, y]_D - \tilde{b}Q[x, y]_D$, on obtient

$$\begin{aligned} (\delta_{CE}\sigma)(\alpha, \beta, A, \varphi) &= \varepsilon(\alpha A(Q[\beta, \varphi]_D)) + \varepsilon(\beta(Q[\varphi, \alpha A]_D)) - \varepsilon(\beta(Q[A, [\alpha, \varphi]_s]_D)) \\ &\quad - \varepsilon(\beta A(Q[\alpha, \varphi]_D)) - \varepsilon(\alpha(Q[\varphi, \beta A]_D)) + \varepsilon(\alpha(Q[A, [\beta, \varphi]_s]_D)) \\ &\quad - \varepsilon(\alpha(Q[\beta, [A, \varphi]_s]_D)) - \varepsilon(\beta(Q[[A, \varphi]_s, \alpha]_D)) \\ &= \varepsilon(\alpha A(Q[\beta, \varphi]_D)) + \varepsilon(\beta(Q([\varphi, [\alpha, A]_D]_D + [A, [\varphi, \alpha]_D]_D + [\alpha, [A, \varphi]_D]_D))) \\ &\quad - \varepsilon(\alpha(Q([\varphi, [\beta, A]_D]_D + [A, [\varphi, \beta]_D]_D + [\beta, [A, \varphi]_D]_D))) \\ &\quad + \varepsilon(\beta(Q[A, \tilde{b}Q[\alpha, \varphi]_D]_D)) - \varepsilon(\beta(Q[\alpha, \tilde{b}Q[A, \varphi]_D]_D)) \\ &\quad - \varepsilon(\alpha(Q[A, \tilde{b}Q[\beta, \varphi]_D]_D)) + \varepsilon(\alpha(Q[\beta, \tilde{b}Q[A, \varphi]_D]_D)) - \varepsilon(\beta A(Q[\alpha, \varphi]_D)). \end{aligned}$$

Le deuxième et le troisième terme s'annulent par l'identité de Jacobi. De plus, pour $x, y \in \text{Hom}(V, TV)$, $\tilde{b}[x, Q(y)]_D = [x, \tilde{b}Q(y)] = [x, (id - P)(y)]_D$ ce qui implique que $[x, Q(y)]_D = Q[x, (id - P)(y)]_D +$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon([x, Q(y)]_D). \text{ Combiné avec le fait que } \alpha(\mathbf{1}) = 0 = \beta(\mathbf{1}), \text{ on trouve} \\
& (\delta_{CE}\sigma)(\alpha, \beta, A, \varphi) = \varepsilon(\alpha A(Q[\beta, \varphi]_D)) - \varepsilon(\beta A(Q[\alpha, \varphi]_D)) \\
& \quad + \varepsilon(\beta([A, Q[\alpha, \varphi]_D]_D)) - \varepsilon(\beta([\alpha, Q[A, \varphi]_D]_D)) \\
& \quad - \varepsilon(\alpha([A, Q[\beta, \varphi]_D]_D)) + \varepsilon(\alpha([\beta, Q[A, \varphi]_D]_D)) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

En effet, la projection par Q donne un élément de V , donc l'action du crochet sur les éléments de degré 0 est l'évaluation, par exemple $[A, Q[\alpha, \varphi]_D]_D = A Q[\alpha, \varphi]_D$, et comme $[\alpha, \beta] = 0$ les autres termes s'annulent par identité de Jacobi. \square

Proposition 3.1.8 *Si l'on choisit un autre supplémentaire gradué \mathcal{H}' de $B\mathcal{G}^0$ et donc une autre section ϕ'_1 , le 3-cocycle σ est modifié par un cobord.*

Preuve. Soit $\phi'_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ une autre section associée au supplémentaire gradué \mathcal{H}' . En prenant la projection canonique p de l'espace des cocycles sur \mathfrak{g} , on obtient $p(\phi'_1 - \phi_1) = 0$, donc $\phi'_1 - \phi_1 \in \text{Im } \tilde{b}$ et il existe $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow B\mathcal{G}^0 \cong TV^+$ tel que $\phi'_1 = \phi_1 + \tilde{b}\chi$. Notons P' la projection de $Z\mathcal{G}^0$ sur \mathcal{H}' et Q' l'application telle que $\tilde{b}Q' = id - P'$. On a $P' = \phi'_1 \circ p = (\phi_1 + \tilde{b}\chi) \circ p = P + \tilde{b}\chi p$ donc $\tilde{b}Q' = id - P' = id - P - \tilde{b}\chi p = \tilde{b}Q - \tilde{b}\chi p$. Alors $\tilde{b}(Q' - (Q - \chi p)) = 0$ et $Q' = Q - \chi p$ puisque \tilde{b} est bijective sur TV^+ .

Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$ les classes de cohomologie de x_1, x_2, x_3 , alors $\phi_1(x_1), \phi_1(x_2), \phi_1(x_3) \in \mathcal{H}$. Comme précédemment, pr_{-1} est la projection sur $V^* = \mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}'^{-1}$, donc le cocycle σ s'exprime comme suit :

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(Q[\phi_1(x_2), \phi_1(x_3)]_D)).$$

On calcule le cocycle σ' associé au supplémentaire gradué \mathcal{H}' .

$$\begin{aligned}
\sigma'(x_1, x_2, x_3) & := \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(Q'[\phi'_1(x_2), \phi'_1(x_3)]_D)) \\
& = \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)((Q - \chi p)[(\phi_1 + \tilde{b}\chi)(x_2), (\phi_1 + \tilde{b}\chi)(x_3)]_D)) \\
& = \bigcirc_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)((Q - \chi p)([\phi_1(x_2), \phi_1(x_3)]_D + [\phi_1(x_2), \tilde{b}\chi(x_3)]_D \\
& \quad + [\tilde{b}\chi(x_2), \phi_1(x_3)]_D + [\tilde{b}\chi(x_2), \tilde{b}\chi(x_3)]_D)))
\end{aligned}$$

Par définition, on a $p[\phi_1(u), \phi_1(v)]_D = [u, v]_s$; $p \circ \tilde{b} = 0$ implique que $\chi p \tilde{b} = 0$ et avec les équations (3.1.9) et (3.1.10), on a

$$\begin{aligned}
\sigma'(x_1, x_2, x_3) & = \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(Q[\phi_1(x_2), \phi_1(x_3)]_D)) - \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(\chi[x_2, x_3]_s)) \\
& \quad + \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(Q\tilde{b}(\phi_1(x_2)(\chi(x_3)))))) - \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(Q\tilde{b}(\phi_1(x_3)(\chi(x_2)))))) \\
& \quad + \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(Q\tilde{b}[\chi(x_2), \chi(x_3)]_D)) + \text{permutation cyclique des } x_i
\end{aligned}$$

et comme $Q\tilde{b} = id_{\mathcal{G}|_{TV^+}}$, et $[[TV^+, TV^+]] \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sigma'(x_1, x_2, x_3) &= \sigma(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad - \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(\chi[x_2, x_3]_s)) + \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(\phi_1(x_2)(\chi(x_3)))) \\ &\quad - \varepsilon(\text{pr}_{-1}(x_1)(\phi_1(x_3)(\chi(x_2)))) + \text{permutation cyclique des } x_i \end{aligned}$$

Soit $\omega : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ défini par $\omega(\dot{x}, \dot{y}) = \varepsilon(\text{pr}_{-1}(\dot{x})(\chi(\dot{y}))) - \varepsilon(\text{pr}_{-1}(\dot{y})(\chi(\dot{x})))$.
Puisque $\text{pr}_{-1}([\dot{x}, \dot{y}]_s) = \text{pr}_{-1}(\dot{x})\phi_1(\dot{y}) - \text{pr}_{-1}(\dot{y})\phi_1(\dot{x})$, on a

$$\sigma'(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2, x_3) - (\delta_{CE}\omega)(x_1, x_2, x_3).$$

□

3.1.4 Cas d'un espace de dimension finie

On suppose que V est de dimension finie $N \geq 2$. On va décrire \mathcal{H} , le supplémentaire gradué de $\tilde{b}TV^+$ comme un noyau.

Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq N}$ une base de V et $\{e^i\}_{1 \leq i \leq N}$ sa base duale de V^* .
Pour $n \in \mathbb{N}$ on écrit les applications $\varphi \in \text{Hom}(V, V^{\otimes n+1})$ comme

$$\varphi = \sum_{j, i_0, \dots, i_n} \varphi_j^{i_0 \dots i_n} e_{i_0} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \otimes e^j.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} S_n : \text{Hom}(V, V^{\otimes n+1}) &\rightarrow V^{\otimes n} \\ S_n(\varphi) &\mapsto \sum_{j, i_1, \dots, i_n} \varphi_j^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Soit $S : \text{Hom}(V, TV) \rightarrow TV$ la somme $S := \sum_{n \geq 0} S_n$, homogène de degré 0.

Proposition 3.1.9 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

- (i) $\text{Ker } S_n \cap \tilde{b}V^{\otimes n} = \{0\}$.
- (ii) Pour $n \geq 1$, $\text{Hom}(V, V^{\otimes n+1}) = \text{Ker } S_n \oplus \tilde{b}V^{\otimes n}$, donc $\mathcal{H}^n \cong \text{Ker } S_n$.

Preuve. (i) Soit $w \in V^{\otimes n}$, on calcule, pour utilisation ultérieure, $S_n(\tilde{b}w) = S_n(ad_w)$. Pour tout $v \in V$, on a

$$\begin{aligned} ad_w(v) &= wv - vw \\ &= \sum_{i_0, \dots, i_n} \left(w^{i_1 \dots i_n} v^{i_0} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \otimes e_{i_0} - v^{i_0} w^{i_1 \dots i_n} e_{i_0} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_0, \dots, i_n} \left(\left(w^{i_0 \dots i_{n-1}} \delta_j^{i_n} - \delta_j^{i_0} w^{i_1 \dots i_n} \right) v^j e_{i_0} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \right), \end{aligned}$$

donc $S_n(ad_w) = \sum_{i_1, \dots, i_n} w^{i_1 i_2 \dots i_n} - N w^{i_1 \dots i_n}$, ce que l'on peut écrire comme $S_n(ad_w) = \zeta(w) - Nw$, où $\zeta(e_{i_0} \dots e_{i_n}) := e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \otimes e_{i_0}$ est une permutation cyclique étendue en une application linéaire. Comme $\zeta^n = id_{V^{\otimes n}}$, il s'ensuit que ζ est diagonalisable, avec valeurs propres $1, u, \dots, u^{n-1}$ où u est une racine primitive de l'unité. Comme $|u| = 1$ et $N \geq 2$, $\zeta - Nid$ est inversible d'inverse

$$\begin{aligned} (\zeta - Nid)^{-1} &= \left(-N \left(id - \frac{1}{N} \zeta \right) \right)^{-1} = -\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \zeta \right)^i \\ &= -\frac{1}{N} \left(id + \frac{1}{N} \zeta + \dots + \frac{1}{N^{n-1}} \zeta^{n-1} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^{in}} \\ &= -\frac{1}{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{N^n}} \left(id + \frac{1}{N} \zeta + \dots + \frac{1}{N^{n-1}} \zeta^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker } S_n \cap \tilde{b}V^{\otimes n} = \{0\}$ et S_n est surjective.

- (ii) On a $\dim \text{Hom}(V, V^{\otimes n+1}) = N^{n+2}$, $\dim \tilde{b}V^{\otimes n} = N^n$ pour $n \geq 1$ et $\dim \text{Ker } S_n = N^{n+2} - N^n$ car S_n est surjective. Donc

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker } S_n + \tilde{b}V^{\otimes n}) &= \dim(\text{Ker } S_n \oplus \tilde{b}V^{\otimes n}) \\ &= N^{n+2} - N^n + N^n = N^{n+2} \\ &= \dim \text{Hom}(V, V^{\otimes n+1}), \end{aligned}$$

et $\text{Hom}(V, V^{\otimes n+1}) = \text{Ker } S_n \oplus \tilde{b}V^{\otimes n} = \mathcal{H}^n \oplus \tilde{b}V^{\otimes n}$, donc $\mathcal{H}^n \cong \text{Ker } S_n$. □

Ceci montre que $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq -1} \text{Ker } S_n$ est un supplémentaire gradué de $\tilde{b}TV^+$ et procure ainsi une section.

Lemme 3.1.10 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Pour tous $A \in \text{Hom}(V, V)$, $\varphi \in \text{Hom}(V, V^{\otimes n+1})$, $S_n([A, \varphi]) = A(S_n(\varphi))$. En particulier, $[A, \text{Ker } S_n] \subset \text{Ker } S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Pour tous $\alpha \in V^\star$ et $\varphi \in \text{Hom}(V, V^{\otimes n+1})$, $S_{n-1}([\alpha, \varphi]) = \alpha(S_n(\varphi)) + \sum_{j, i_0, i_2, \dots, i_n} \alpha_{i_0} \varphi_j^{i_0 j i_2 \dots i_n} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$.

Preuve. (i) On a

$$[A, \varphi]_j^{i_0 \dots i_n} = \sum_k \left(A_k^{i_0} \varphi_j^{k i_1 \dots i_n} + \sum_{r=1}^n A_k^{i_r} \varphi_j^{i_0 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_n} - \varphi_k^{i_0 \dots i_n} A_j^k \right),$$

d'où

$$S([A, \varphi])^{i_1 \dots i_n} = \sum_k \left(A_k^j \varphi_j^{ki_1 \dots i_n} \right) + \sum_k \sum_{r=1}^n A_k^{i_r} \varphi_j^{ji_1 \dots i_{r-1} ki_{r+1} \dots i_n} - \sum_k \left(\varphi_k^{ji_1 \dots i_n} A_k^j \right) = (A(S(\varphi)))^{i_1 \dots i_n}$$

(ii) On a $[\alpha, \varphi]_j^{i_0 \dots i_{n-1}} = \sum_k \left(\alpha_k \varphi_j^{ki_0 \dots i_{n-1}} + \sum_{r=1}^n \alpha_k \varphi_j^{i_0 \dots i_{r-1} ki_{r+1} \dots i_{n-1}} \right)$
d'où

$$\begin{aligned} S_{n-1}([\alpha, \varphi])^{i_1 \dots i_{n-1}} &= \sum_{k,j} \left(\alpha_k \varphi_j^{kji_1 \dots i_{n-1}} + \alpha_k \varphi_j^{jki_1 \dots i_{n-1}} + \sum_{r=2}^n \alpha_k \varphi_j^{ji_1 \dots i_{r-1} ki_{r+1} \dots i_{n-1}} \right) \\ &= \sum_{k,j} \left(\alpha_k \varphi_j^{kji_1 \dots i_{n-1}} \right) + \alpha(S_n(\varphi))^{i_1 \dots i_{n-1}} \end{aligned}$$

□

3.2 FORMALITÉ PERTURBÉE

On considère à nouveau l'équation (3.1.16). Pour que le complexe de Hochschild associé à $\mathcal{T}V$ soit formel, il faudrait trouver une application q telle que le 3-cocycle σ soit annulé par le 3-cobord $\delta_{CE}q$ et qu'ainsi l'équation de formalité (2.2.8) soit aussi vérifiée à l'ordre $k = 2$. Ce n'est cependant pas possible, c'est-à-dire qu'on a le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 *Le cocycle σ définit une classe de cohomologie non nulle dans \mathfrak{g} .*

Corollaire 3.2.2 *Soit V un espace vectoriel, $\dim V \geq 2$. Le complexe de Hochschild de $\mathcal{A} = \mathcal{T}V$ n'est pas formel.*

L'équation de formalité reste perturbée par le 3-cocycle σ , on a seulement un morphisme L_∞ entre $(\mathfrak{g}, d' = d_2 + \sigma)$ et $(\mathcal{G}, b + D)$.

Le reste de cette section constitue la preuve de ces résultats. Pour y parvenir, on traite d'abord le cas de la dimension finie à grand renfort de calculs ; on utilisera un argument de découpage de l'espace pour obtenir le résultat en dimension quelconque (plus grande que 2).

On suppose que V est de dimension finie $N \geq 2$. Avec l'équation (3.1.17), il n'y a que deux cas à considérer : (3.1.18) et (3.1.19). On obtient des conditions plus précises sur σ et q dans chaque cas.

3.2.1 Calculs pour la partie cocycle dans le cas (3.1.18)

Lemme 3.2.3 *Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$. Dans le cas (3.1.18), $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ s'annule.*

Preuve. Soit $x_1 = \alpha \in \mathcal{H}^{-1} = V^*$, $x_2 = A \in \mathcal{H}^0 = \text{Hom}(V, V)$ et $x_3 = \varphi \in \mathcal{H}^1$. On veut montrer que

$$0 = \sigma(\alpha, A, \varphi) = \varepsilon(\text{pr}_{-1}(\alpha)(Q[A, \varphi]_D)) + \varepsilon(\text{pr}_{-1}(A)(Q[\varphi, \alpha]_D)) + \varepsilon(\text{pr}_{-1}(\varphi)(Q[\alpha, A]_D)).$$

Comme $[\varphi, \alpha]_D = -\alpha \circ \varphi$ est de degré 0 et que $Q_0 = 0$, on a $Q[\varphi, \alpha]_D = 0$ et le deuxième terme de la somme s'annule. De même, puisque $[\alpha, A]_D = \alpha \circ A$ est de degré -1 et que $Q_{-1} = 0$, $Q[\alpha, A]_D = 0$ et le troisième terme s'annule également. Le crochet $[A, \varphi]_D$ est de degré 1, mais d'après le Lemme 3.1.10, $[A, \varphi]_D \in \text{Ker } S_1 = \mathcal{H}^1$, donc le premier terme s'annule. \square

3.2.2 Calculs pour la partie cocycle dans le cas (3.1.19)

On s'intéresse maintenant au terme $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ dans le cas (3.1.19). On pose $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ et $x_3 = \varphi$, avec $|\alpha| = -1 = |\beta|$ et $\varphi \in \mathcal{H}^2 \subset \text{Hom}(V, V^{\otimes 3})$. Comme $[\alpha, \beta]_D = 0$, on a dans ce cas

$$\sigma(\alpha, \beta, \varphi) = \varepsilon(\alpha(Q[\beta, \varphi]_D)) + \varepsilon(\beta(Q[\varphi, \alpha]_D)) \quad (3.2.1)$$

Proposition 3.2.4 *On peut écrire $\sigma(\alpha, \beta, \varphi)$ sous la forme*

$$\sigma(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{1}{N-1} \sum_{k,j,l} (\beta_l \alpha_k - \alpha_l \beta_k) \varphi_j^{kjl} = \frac{1}{N-1} \sum_{k,j,l} \alpha_l \beta_k (\varphi_j^{ljk} - \varphi_j^{kjl}) \quad (3.2.2)$$

Preuve. Calculons $Q[\alpha, \varphi]_D$:

on a $[\alpha, \varphi]_D^{i_0 i_1} = \sum_k \left(\alpha_k \varphi_j^{k i_0 i_1} + \alpha_k \varphi_j^{i_0 k i_1} + \alpha_k \varphi_j^{i_0 i_1 k} \right)$ et

$$S_1([\alpha, \varphi]_D)^{i_1} \stackrel{3.1.10(ii)}{=} \sum_{k,j} \alpha_k \varphi_j^{k j i_1} \quad (3.2.3)$$

car $\varphi \in \mathcal{H}^2$ donc $S_2(\varphi) = 0$. On obtient

$$(\tilde{b}S_1([\alpha, \varphi]_D))_j^{i_0 i_1} = ad(S_1([\alpha, \varphi]_D))_j^{i_0 i_1} = \sum_{k,r} \left(\alpha_k \varphi_r^{k r i_0} \delta_j^{i_1} - \delta_j^{i_0} \varphi_r^{k r i_1} \right),$$

d'où

$$S_1(\tilde{b}S_1([\alpha, \varphi]_D))^{i_1} = \sum_{k,r} \alpha_k \varphi_r^{k r i_1} - N \alpha_k \varphi_r^{k r i_1} = (1-N) S_1([\alpha, \varphi]_D)^{i_1}.$$

Il s'ensuit que

$$[\alpha, \varphi]_D + \frac{1}{N-1} \tilde{b}S_1([\alpha, \varphi]_D) = P[\alpha, \varphi]_D = [\alpha, \varphi]_s$$

est dans $\text{Ker } S_1 = \mathcal{H}^1$, et donc

$$[\alpha, \varphi]_D = [\alpha, \varphi]_D + \frac{1}{N-1} \tilde{b}S_1([\alpha, \varphi]_D) + \tilde{b} \left(\frac{-1}{N-1} S_1([\alpha, \varphi]_D) \right).$$

Ainsi

$$Q[\alpha, \varphi]_D = -\frac{1}{N-1} S_1([\alpha, \varphi]_D) \stackrel{(3.2.3)}{=} -\frac{1}{N-1} \sum_{k,j,i_1} \alpha_k \varphi_j^{kji_1} e_{i_1},$$

et le terme (3.2.1) devient

$$\sigma(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{1}{N-1} \sum_{k,j,l} (\beta_l \alpha_k - \alpha_l \beta_k) \varphi_j^{kjl} = \frac{1}{N-1} \sum_{k,j,l} \alpha_l \beta_k (\varphi_j^{ljk} - \varphi_j^{kjl}).$$

□

3.2.3 Calculs pour la partie cobord dans le cas (3.1.18)

Dans le cas (3.1.18), la partie en ε s'annule en utilisant le Lemme 3.2.3. Pour que le complexe de Hochschild associé à $\mathcal{T}V$ soit formel, il faut que la partie en q s'annule aussi, donc l'application $q : \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ doit vérifier, pour $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$ comme dans le cas (3.1.18),

$$0 = -(\delta_{CE}q)(x_1, x_2, x_3) = q([x_1, x_2]_s, x_3) + q([x_2, x_3]_s, x_1) + q([x_3, x_1]_s, x_2). \quad (3.2.4)$$

On a $\mathcal{H}^0 = \text{Hom}(V, V) \cong \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$. On pose $q_{00} = q|_{\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}) \wedge \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})}$. Comme $\sigma(x_1, x_2, x_3) = 0$ pour $x_i \in \mathcal{H}^0 = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$, il faut déjà avoir $(\delta_{CE}q_{00}) = 0$ i.e. $q_{00} \in Z_{CE}^2(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ est un 2-cocycle scalaire de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$.

Proposition 3.2.5 *Le deuxième groupe de la cohomologie scalaire de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ est trivial, i.e. $H_{CE}^2(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = 0$.*

Preuve. Soit $\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$ une base de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$, on a

$$\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}) = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{K}) \oplus w\mathbb{K}, \quad \text{où } w = \sum_{k=1}^N E_{kk}.$$

D'après le Théorème 1.2.2 de Hochschild-Serre, on obtient

$$H_{CE}^2(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = \bigoplus_{k=0}^2 H_{CE}^k(\mathfrak{sl}_N(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \otimes H_{CE}^{2-k}(w\mathbb{K}, \mathbb{K}) \cong H_{CE}^2(w\mathbb{K}, \mathbb{K})^{\mathfrak{sl}_N(\mathbb{K})} = 0,$$

car

$$H_{CE}^k(\mathfrak{sl}_N(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

en utilisant le théorème de Whitehead. □

Ainsi, le 2-cocycle q_{00} est un 2-cobord, i.e. il existe $p : \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ tel que $\forall A, B \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$, $q_{00}(A, B) = -p([A, B])$. Il existe $P \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ tel que pour $A \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$, $p(A) = \sum_{i,j} P_i^j A_j^i = \text{tr}(PA)$.

On pose $q_{-1,1} = q|_{\mathcal{H}^{-1} \wedge \mathcal{H}^1}$, on peut l'écrire sous la forme

$$q_{-1,1} : \text{Hom}(V, V^{\otimes 2}) \wedge V^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\left(\sum_{k,i,j} \psi_k^{ij} e_i \cdot e_j \otimes e^k \right) \wedge \left(\sum_l \alpha_l e^l \right) \mapsto \sum_{i,j,k,l} \bar{q}_{ij}^{kl} \psi_k^{ij} \alpha_l$$

Proposition 3.2.6 *Sous la condition (3.2.4), on peut écrire \bar{q}_{ij}^{kl} comme*

$$\bar{q}_{ij}^{kl} = P_i^k \delta_j^l + P_j^k \delta_i^l - \frac{1}{N} \delta_i^k P_j^l + \nu \delta_i^k \delta_j^l - N \nu \delta_j^k \delta_i^l,$$

où $P = Q + \rho \mathbf{1}$, $\text{tr}(Q) = 0$ et $\nu \in \mathbb{K}$.

Preuve. Pour $\alpha \in \mathcal{H}^{-1}$, $A \in \mathcal{H}^0$, $\psi \in \mathcal{H}^1$, on a

$$[A, \psi]_{Dk}^{ij} = \sum_r \left(A_r^i \psi_k^{rj} + A_r^j \psi_k^{ir} - A_r^r \psi_k^{ij} \right)$$

$$[\psi, \alpha]_{Dk}^i = -[\alpha, \psi]_{Dk}^i = -\sum_r \left(\alpha_r \psi_k^{ri} + \alpha_r \psi_k^{ir} \right),$$

ainsi l'équation (3.2.4) se lit, avec α, A, ψ

$$\begin{aligned} 0 &= q_{-1,1}(\psi, [\alpha, A]_D) - q_{-1,1}([A, \psi]_D, \alpha) + \text{tr}(p([\psi, \alpha]_D, A)) \\ &= \sum_{i,j,k,l,r} \left(\bar{q}_{ij}^{kl} \psi_k^{ij} \alpha_r A_l^r - \bar{q}_{ij}^{kl} A_r^i \psi_k^{rj} \alpha_l - \bar{q}_{ij}^{kl} A_r^j \psi_k^{ir} \alpha_l + \bar{q}_{ij}^{kl} A_k^r \psi_r^{ij} \alpha_l \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l,r} \left(P_i^k \sum_s \left(-\alpha_r \psi_s^{ri} A_k^s - \alpha_r \psi_s^{ir} A_k^s + A_s^i \alpha_r \psi_k^{rs} + A_s^i \alpha_r \psi_k^{sr} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l,r} \psi_k^{ij} \alpha_l \left(A_r^k \bar{q}_{ij}^{rl} + A_r^l \bar{q}_{ij}^{kr} - A_i^r \bar{q}_{rj}^{kl} - A_j^r \bar{q}_{ir}^{kl} \right. \\ &\quad \left. - \delta_i^l A_r^k P_j^r - \delta_j^l A_r^k P_i^r + \delta_i^l A_j^r P_r^k + \delta_j^l A_i^r P_r^k \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l,r} \psi_k^{ij} \alpha_l M_{ij}^{kl} \end{aligned}$$

où $M_{ij}^{kl} = [A, q_{-1,1}]_{Dij}^{kl} + [P, A]_{Dj}^k \delta_i^l + [P, A]_{Di}^k \delta_j^l$.

On définit $p_{-1,1} \in \text{Hom}(V^{\otimes 2}, V^{\otimes 2})$ par

$$p_{-1,1} = \sum_{i,j,k,l} \bar{p}_{ij}^{kl} e^i \cdot e^j \otimes e_k \cdot e_l$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \left(p_i^k \delta_j^l + p_j^k \delta_i^l \right) e^i \cdot e^j \otimes e_k \cdot e_l,$$

on obtient $M_{ij}^{kl} = ([A, q_{-1,1} - p_{-1,1}]_D)_{ij}^{kl}$.

On peut décomposer

$$\psi_k^{ij} = B_k^i v^j \quad \text{avec } v \in V, B \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}) \text{ et } \text{tr}(B) = 0,$$

car $\psi \in \mathcal{H}^1 = \text{Ker } S_1$, donc $0 = S_1(\psi)^j = \sum_k \psi_k^{kj}$. On a alors $\forall \alpha \in V^*$, $\forall v \in V$, $\forall B \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ avec $\text{tr}(B) = 0$

$$0 = B_k^i v^j \alpha_l M_{ij}^{kl} \Rightarrow B_k^i M_{ij}^{kl} = 0 \quad \forall B \text{ avec } \text{tr}(B) = 0$$

En particulier, pour $B = E_{ij}$, on obtient $M_{ij}^{kl} = \frac{1}{N} \delta_i^k \sum_r M_{rj}^{rl}$, donc $\forall A \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$

$$0 = \left[A, (q_{-1,1} - p_{-1,1}) - \frac{1}{N} \text{tr}(q_{-1,1} - p_{-1,1}) \right]_D.$$

On rappelle le théorème des tenseurs invariants [KMS93, Theorem 24.4 page 214].

Théorème 3.2.7 Soit $t \in V^{\otimes k} \otimes V^{\star \otimes l}$

$$t = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l} t_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \dots e_{i_k} \otimes e^{j_1} \dots e^{j_l}$$

tel que $\forall A \in GL(V)$, $[A, t]_D = 0$. Alors

$$t = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma \bar{\sigma} & \text{si } k = l \end{cases}$$

où $a_\sigma \in \mathbb{K}$ et

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \dots e_{i_k} \otimes e^{j_1} \dots e^{j_l} \\ &= \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \dots \delta_{j_{\sigma(k)}}^{i_k} e_{i_1} \dots e_{i_k} \otimes e^{j_1} \dots e^{j_l}. \end{aligned}$$

Ce théorème nous donne

$$\left((q_{-1,1} - p_{-1,1}) - \frac{1}{N} \text{tr}(q_{-1,1} - p_{-1,1}) \right)_{ij}^{kl} = \lambda \delta_i^k \delta_j^l + \mu \delta_j^k \delta_i^l,$$

donc

$$\bar{q}_{ij}^{kl} = P_i^k \delta_j^l + P_j^k \delta_i^l + \sum_r \left(\frac{1}{N} \bar{q}_{rj}^{rl} - \frac{1}{N} P_r^r \delta_i^k \delta_j^l \right) - \frac{1}{N} \delta_i^k P_j^l + \lambda \delta_i^k \delta_j^l + \mu \delta_j^k \delta_i^l.$$

La contraction $k \leftrightarrow i$ donne $\mu = -N\lambda$ et comme précédemment, puisque $\forall \psi \in \mathcal{H}^1 = \text{Ker } S_1$, $\forall \alpha \in V^*$ on a $\sum_{r,j,l} \bar{q}_{rj}^{rl} \psi_r^{rj} \alpha_l = 0$, on obtient $\sum_r \bar{q}_{rj}^{rl} = 0$.

Finalement, en remplaçant P par $Q + \rho \mathbf{1}$, avec $\rho \in \mathbb{K}$, $Q \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$, $\text{tr}(Q) = 0$, on a

$$\bar{q}_{ij}^{kl} = Q_i^k \delta_j^l + Q_j^k \delta_i^l - \frac{1}{N} \delta_i^k Q_j^l + \nu \delta_i^k \delta_j^l - N \nu \delta_j^k \delta_i^l \quad \text{avec } \nu = \lambda - \frac{\rho}{N}.$$

□

3.2.4 Calculs pour la partie cobord dans le cas (3.1.19)

Proposition 3.2.8 Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$. Dans le cas (3.1.19), $(\delta_{CE}q)(x_1, x_2, x_3)$ s'annule.

Preuve. On pose $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ et $x_3 = \varphi$, avec $|\alpha| = -1 = |\beta|$ et $\varphi \in \mathcal{H}^2 \subset \text{Hom}(V, V^{\otimes 3})$. Comme $[\alpha, \beta]_D = 0$, et en considérant les degrés, la partie en q restante est

$$q_{-1,1}(P[\beta, \varphi]_D, \alpha) - q_{-1,1}([\alpha, \varphi]_D, \beta)$$

Dans la Section 3.2.2, on a calculé que

$$P[\alpha, \varphi]_D = [\alpha, \varphi]_D + \frac{1}{N-1} \tilde{b}S_1([\alpha, \varphi]_D),$$

donc on peut écrire

$$\begin{aligned} & q_{-1,1}(P[\beta, \varphi]_D, \alpha) - q_{-1,1}(P[\alpha, \varphi]_D, \beta) \\ &= \sum_{k,l,i,j,r} \alpha_k \beta_l \left[\bar{q}_{ij}^{rk} \left(\varphi_r^{lij} + \varphi_r^{ilj} + \varphi_r^{ijl} + \frac{1}{N-1} \sum_s \left(\delta_r^j \varphi_s^{lsi} - \delta_r^i \varphi_s^{lsj} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \text{permutation } k \leftrightarrow l \right] \end{aligned}$$

Avec la Proposition 3.2.6, en remplaçant \bar{q}_{ij}^{rk} par $Q_i^r \delta_j^k + Q_j^r \delta_i^k - \frac{1}{N} \delta_i^r Q_j^k + \nu \delta_i^r \delta_j^k - N \nu \delta_j^r \delta_i^k$ et en développant, on obtient

$$q_{-1,1}(P[\beta, \varphi]_D, \alpha) - q_{-1,1}(P[\alpha, \varphi]_D, \beta) = 0.$$

□

Ainsi, dans le cas (3.1.19), $(\delta_{CE}q)$ s'annule mais pas σ , donc TV n'est pas formelle pour V de dimension $N \geq 2$.

Supposons maintenant que V est un espace vectoriel de dimension quelconque (plus grande que 2). On choisit un sous-espace vectoriel $U \subset V$ de dimension finie $N \in \mathbb{N}$. Si le complexe de Hochschild associé à l'algèbre TV était formel, on aurait un morphisme L_∞ entre (\mathfrak{g}, \bar{d}) et $(\mathcal{G}, \bar{b} + \bar{D})$, et donc $d_3 = 0$; la classe de cohomologie du 3-cocycle σ serait nulle. Avec un bon choix de l'application q ,

on aurait $\sigma(v_1, v_2, v_3) = 0$ pour tous $v_i \in \mathfrak{g}_V = \mathbb{K}\mathbf{1} \oplus \text{Hom}(V, \mathcal{T}V)/\mathcal{T}V^+$, $i = 1, 2, 3$. En particulier, en se restreignant au sous-espace U , pour tous $u_1, u_2, u_3 \in \mathfrak{g}_U = \mathbb{K}\mathbf{1} \oplus \text{Hom}(U, \mathcal{T}U)/\mathcal{T}U^+ \subset \mathfrak{g}_V$, on aurait alors $\sigma|_{\mathfrak{g}_U}(u_1, u_2, u_3) = 0$ ce qui n'est pas possible puisque le complexe de Hochschild de $\mathcal{T}U$ n'est pas formel. Ainsi, pour tout espace vectoriel V , le complexe de Hochschild associé à l'algèbre $\mathcal{T}V$ n'est pas formel.

ÉTUDE DE LA FORMALITÉ POUR L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}(3)$

SOMMAIRE

4.1	DESCRIPTION DE L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}(3)$	68
4.2	SOUS-ALGÈBRE DU COMPLEXE DE CHEVALLEY-EILENBERG	69
4.3	RÉTRACTE PAR DÉFORMATION DU COMPLEXE	72
4.4	CALCUL DE LA STRUCTURE L_∞	73

ON étudie la formalité pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$. On rappelle quelle est sa cohomologie, et on montre qu'on peut rétracter le complexe de Chevalley-Eilenberg sur une algèbre plus petite, ayant même cohomologie. On expose alors à nouveau les équations de formalité, puis on prouve qu'elles ne peuvent être vérifiées. Le calcul d'une structure L_∞ perturbée donne une seule composante d'arité 3 et on obtient comme dans le cas des algèbres libres un morphisme L_∞ dont les composantes d'arité supérieures à 3 sont nulles.

4.1 DESCRIPTION DE L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}(3)$

On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Elle admet comme représentation matricielle l'ensemble des matrices antisymétriques de dimension 3,

$$\mathfrak{so}(3) = \{M \in M_3(\mathbb{K}), \quad {}^tM = -M\} \quad (4.1.1)$$

on peut aussi la considérer de manière abstraite engendrée par trois éléments avec les relations suivantes

$$\mathfrak{so}(3) = \langle e_1, e_2, e_3 \mid [e_i, e_{i+1}] = e_{i+2} \quad i = 1, 2, 3 \pmod{3} \rangle, \quad (4.1.2)$$

les autres crochets non mentionnés se déduisant par antisymétrie ou étant nuls.

Dans ce cas, les générateurs correspondent aux matrices antisymétriques suivantes

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le crochet au commutateur matriciel : $[x, y] = xy - yx$.

On identifie $\mathfrak{so}(3)$ à son dual via le produit scalaire q , avec

$$q(e_i, e_j) := \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

sur la base et (portant le même nom par abus)

$$q(x) = \frac{1}{2} x \cdot x = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

la forme quadratique associée.

La structure de Poisson associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ est

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} P^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \\ &= \frac{1}{2} (P^{12} \partial_1 \wedge \partial_2 + P^{13} \partial_1 \wedge \partial_3 + P^{21} \partial_2 \wedge \partial_1 + P^{23} \partial_2 \wedge \partial_3 + P^{31} \partial_3 \wedge \partial_1 + P^{32} \partial_3 \wedge \partial_2) \\ &= \frac{1}{2} (x_3 \partial_1 \wedge \partial_2 - x_2 \partial_1 \wedge \partial_3 - x_3 \partial_2 \wedge \partial_1 + x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 - x_1 \partial_3 \wedge \partial_2) \\ &= x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_3 \partial_1 \wedge \partial_2, \end{aligned}$$

donc $(\mathcal{S}(\mathfrak{so}(3)), \cdot, \{, \})$ est une algèbre de Poisson, avec

$$P := \{, \} := x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_3 \partial_1 \wedge \partial_2 \quad (4.1.3)$$

4.2 COHOMOLOGIE ET SOUS-ALGÈBRE DU COMPLEXE DE CHEVALLEY-EILENBERG

On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(3)$ et son complexe de Chevalley-Eilenberg $\mathfrak{A} := C_{CE}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g})$.

Comme $\mathfrak{so}(3)$ est simple, en utilisant le théorème de Whitehead, on connaît sa cohomologie \mathfrak{a} à valeurs dans $\mathcal{S}\mathfrak{g}$, donnée par

$$\mathfrak{a}^k := H_{CE}^k(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) = \begin{cases} \mathbb{K}[q]\mathbf{1} & \text{si } k = 0, \\ \{0\} & \text{si } k = 1 \text{ ou } k = 2, \\ \mathbb{K}[q]\omega & \text{si } k = 3, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

où $\omega = \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3$.

De plus, le crochet de Schouten $[\cdot, \cdot]_s$ de l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{A}[1]$ étant de degré 0, il induit sur la cohomologie $\mathfrak{a}[1]$ un crochet nul $[\cdot, \cdot]'_s \equiv 0$; $\mathfrak{a}[1]$ est donc une algèbre de Lie abélienne.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{a}[1] = & \mathbb{K}[q]\mathbf{1} & \oplus & \{0\} & \oplus & \{0\} & \oplus & \mathbb{K}[q]\omega \\ \text{Degré} & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

En effet, si $f, g \in \mathbb{K}[q]$, alors $[f, g]'_s = 0$ (car de degré -2), $[f\omega, g\omega]'_s = 0$ (car de degré 4) et $[f, g\omega]'_s = 0$ car $\mathfrak{a}[1]^1 = \{0\}$.

On calcule plus généralement les crochets de Schouten entre ces quatre composantes au niveau du complexe $\mathfrak{A}[1]$.

Proposition 4.2.1 *Les éléments*

unité $\mathbf{1} \in \mathcal{S}\mathfrak{g}$, *unité pour la multiplication \wedge commutative graduée,*

champ d'Euler $E := x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$ *dérivation « trace »,*

structure de Poisson $P := x_1\partial_2 \wedge \partial_3 + x_2\partial_3 \wedge \partial_1 + x_3\partial_1 \wedge \partial_2$,

trivecteur de base $\omega := \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3$

engendrent (sur $\mathbb{K}[q]$) une sous-algèbre $\mathfrak{A}_{\text{red}}[1] = \langle \mathbf{1}, E, P, \omega \rangle$ de l'algèbre de Lie graduée $(\mathfrak{A}[1], [\cdot, \cdot]_s)$.

Lemme 4.2.2 *Soit $f = \alpha(q) \in \mathbb{K}[q]$. On a les identités suivantes.*

- (i) $\partial_i f = \partial_i \alpha(q) = x_i \alpha'(q)$ (iv) $[P, E]_s = P$,
pour $1 \leq i \leq 3$,
- (ii) $[E, \alpha(q)\mathbf{1}]_s = 2q\alpha'(q)$, (v) $[\omega, E]_s = 3\omega$,
- (iii) $[P, \alpha(q)\mathbf{1}]_s = \delta_{CE}(\alpha(q)\mathbf{1}) = 0$, (vi) $P \wedge E = 2q\omega$.

Preuve.

(i)

$$\partial_i f = \partial_i \alpha(q) = \frac{\partial \alpha}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_i} = \alpha'(q) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right) = x_i \alpha'(q).$$

(ii)

$$E(\alpha(q)) = \sum_{i=1}^3 x_i \partial_i (\alpha(q)) = \sum_{i=1}^3 x_i x_i \alpha'(q) = 2q \alpha'(q).$$

(iii) On a

$$\begin{aligned} [x_1 \partial_2 \wedge \partial_3, \alpha(q) \mathbf{1}]_s &= -(-1)^{1 \times (-1)} [\alpha(q) \mathbf{1}, x_1 \partial_2 \wedge \partial_3]_s \\ &= [\alpha(q) \mathbf{1}, x_1 \partial_2]_s \wedge \partial_3 + (-1)^{-1 \times 0} x_1 \partial_2 \wedge [\alpha(q) \mathbf{1}, \partial_3]_s \\ &= -x_1 \partial_2 (\alpha(q)) \wedge \partial_3 - x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 (\alpha(q)) \\ &= -x_1 \alpha'(q) (x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} [x_2 \partial_3 \wedge \partial_1, \alpha(q)]_s &= -x_2 \alpha'(q) (x_3 \partial_1 - x_1 \partial_3), \\ [x_3 \partial_1 \wedge \partial_2, \alpha(q)]_s &= -x_3 \alpha'(q) (x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1), \end{aligned}$$

ainsi

$$[P, \alpha(q) \mathbf{1}]_s = -\alpha'(q) (x_1 x_2 \partial_3 - x_1 x_3 \partial_2 + x_2 x_3 \partial_1 - x_2 x_1 \partial_3 + x_3 x_1 \partial_2 - x_3 x_2 \partial_1) = 0.$$

(iv)

$$\begin{aligned} [P, E]_s &= -[E, P]_s \\ &= -[x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3, x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_3 \partial_1 \wedge \partial_2]_s. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq 3$,

$$\begin{aligned} [x_i \partial_i, x_1 \partial_2 \wedge \partial_3]_s &= [x_i \partial_i, x_1 \partial_2]_s \wedge \partial_3 + (-1)^{0 \times 1} x_1 \partial_2 \wedge [x_i \partial_i, \partial_3]_s \\ &= (x_i \delta_{i1} \partial_2 - x_1 \delta_{2i} \partial_i) \wedge \partial_3 - x_1 \partial_2 \wedge \delta_{3i} \partial_i \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} [x_i \partial_i, x_2 \partial_3 \wedge \partial_1]_s &= (x_i \delta_{i2} \partial_3 - x_2 \delta_{3i} \partial_i) \wedge \partial_1 - x_2 \partial_3 \wedge \delta_{1i} \partial_i, \\ [x_i \partial_i, x_3 \partial_1 \wedge \partial_2]_s &= (x_i \delta_{i3} \partial_1 - x_3 \delta_{1i} \partial_i) \wedge \partial_2 - x_3 \partial_1 \wedge \delta_{2i} \partial_i. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [E, P]_s &= x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 - x_3 \partial_1 \wedge \partial_2 \\ &\quad - x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 - x_3 \partial_1 \wedge \partial_2 \\ &\quad - x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_3 \partial_1 \wedge \partial_2 \\ &= -2P + P = -P, \end{aligned}$$

et donc $[P, E]_s = P$.

(v)

$$\begin{aligned} [\omega, E]_s &= -[x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3, \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3]_s \\ &= -[E, \partial_1]_s \wedge \partial_2 \wedge \partial_3 - \partial_1 \wedge [E, \partial_2]_s \wedge \partial_3 - \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge [E, \partial_3]_s \\ &= 3\omega. \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}
P \wedge E &= (x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_3 \partial_1 \wedge \partial_2) \wedge (x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3) \\
&= x_1^2 \partial_2 \wedge \partial_3 \wedge \partial_1 + x_2^2 \partial_3 \wedge \partial_1 \wedge \partial_2 + x_3^2 \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3 \\
&= 2q\omega.
\end{aligned}$$

□

Preuve de la Proposition. Il s'agit de montrer la stabilité de l'algèbre réduite par le crochet de Schouten $[\cdot, \cdot]_s$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[q]$, en utilisant les identités du lemme précédent, on obtient

$$[\alpha \mathbf{1}, \beta \mathbf{1}]_s = 0,$$

$$[\alpha E, \beta \mathbf{1}]_s = \alpha E(\beta) \mathbf{1} = 2q\alpha\beta' \mathbf{1},$$

$$[\alpha P, \beta \mathbf{1}]_s = \alpha [P, \beta \mathbf{1}]_s = \alpha \delta_{CE}(\beta \mathbf{1}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
[\alpha \omega, \beta \mathbf{1}]_s &= \alpha [\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3, \beta \mathbf{1}]_s \\
&= \alpha ([\partial_1, \beta \mathbf{1}] \wedge \partial_2 \wedge \partial_3 - \partial_1 \wedge [\partial_2, \beta \mathbf{1}] \wedge \partial_3 + \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge [\partial_3, \beta \mathbf{1}]) \\
&= \alpha (\beta' x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - \beta' x_2 \partial_1 \wedge \partial_3 + \beta' x_3 \partial_1 \wedge \partial_2) \\
&= \alpha \beta' P,
\end{aligned}$$

$$[\alpha E, \beta E]_s = \alpha E(\beta)E - \beta E(\alpha)E = 2q(\alpha\beta' - \alpha'\beta)E,$$

$$\begin{aligned}
[\alpha P, \beta E]_s &= \beta [\alpha P, E]_s = -\beta [E, \alpha P]_s \\
&= -\beta E(\alpha)P - \beta \alpha [E, P]_s \\
&= \beta(\alpha - 2q\alpha')P,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha \omega, \beta E]_s &= \alpha [\omega, \beta E]_s + [\alpha \mathbf{1}, \beta E]_s \wedge \omega \\
&= \alpha ([\omega, \beta \mathbf{1}] \wedge E + \beta [\omega, E]) - 2q\beta\alpha' \omega \\
&= \alpha (\beta' P \wedge E + 3\beta\omega) - 2q\alpha'\beta\omega \\
&= \alpha (2q\beta'\omega + 3\beta\omega) - 2q\alpha'\beta\omega \\
&= (2q(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 3\alpha\beta)\omega,
\end{aligned}$$

et

$$[\alpha P, \beta P]_s = 0, \quad [\alpha \omega, \beta P]_s = 0 \quad [\alpha \omega, \beta \omega]_s = 0,$$

les deux dernières égalités pour des raisons de degrés. Ainsi, les différents crochets donnent bien des multiples (dans $\mathbb{K}[q]$) des éléments $\mathbf{1}, E, P, \omega$. □

Cette algèbre réduite peut aussi se noter

$$\mathfrak{A}_{\text{red}}[1] = \mathbb{K}[q]\mathbf{1} \oplus \mathbb{K}[q]E \oplus \mathbb{K}[q]P \oplus \mathbb{K}[q]\omega = H \oplus W, \quad (4.2.2)$$

où $H := \mathbb{K}[q]\mathbf{1} \oplus \mathbb{K}[q]\omega = \mathfrak{a}[1]$ est la cohomologie et $W = \mathbb{K}[q]E \oplus \mathbb{K}[q]P$ est son supplémentaire dans $\mathfrak{A}_{\text{red}}[1]$.

4.3 RÉTRACTE PAR DÉFORMATION DU COMPLEXE

Calculons la cohomologie du sous-complexe $(\mathfrak{A}_{\text{red}}, \delta_{CE})$, on va montrer qu'on obtient la même cohomologie que pour le complexe de Chevalley-Eilenberg $\mathfrak{A} = C_{CE}(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g})$ entier.

Théorème 4.3.1 *La cohomologie du sous-complexe $(\mathfrak{A}_{\text{red}}, \delta_{CE})$ est donnée par*

$$\mathfrak{a}_{\text{red}}^k := \begin{cases} \mathbb{K}[q]\mathbf{1} & \text{si } k = 0, \\ \{0\} & \text{si } k = 1 \text{ ou } k = 2, \\ \mathbb{K}[q]\omega & \text{si } k = 3. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on utilise le Lemme 4.2.2 pour obtenir les résultats suivants.

$\delta_{CE}(\alpha\mathbf{1}) = 0$, donc $Z^0\mathfrak{A}_{\text{red}} = \mathfrak{A}_{\text{red}}^0 = \mathbb{K}[q]$ et donc $\mathfrak{a}_{\text{red}}^0 = \mathbb{K}[q]$ puisqu'il n'y a pas de cobords en degré 0.

$\delta_{CE}(\alpha E) = [P, \alpha E]_s = \alpha P$ donc αE est un cocycle si et seulement si $\alpha = 0$, donc $Z^1\mathfrak{A}_{\text{red}} = \{0\}$ et par suite $\mathfrak{a}_{\text{red}}^1 = \{0\}$.

$\delta_{CE}(\alpha P) = 0$, donc $Z^2\mathfrak{A}_{\text{red}} = \mathfrak{A}_{\text{red}}^2$. De plus αP est un cobord, car $\alpha P = \delta_{CE}(\alpha E)$, donc $B^2\mathfrak{A}_{\text{red}} = Z^2\mathfrak{A}_{\text{red}}$ et ainsi $\mathfrak{a}_{\text{red}}^2 = \{0\}$.

$\delta_{CE}(\alpha\omega) = [P, \alpha\omega]_s = 0$, donc $Z^3\mathfrak{A}_{\text{red}} = \mathfrak{A}_{\text{red}}^3$ et $B^3\mathfrak{A}_{\text{red}} = \{0\}$ car $\delta(\gamma P) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}[q]$, ainsi $\mathfrak{a}_{\text{red}}^3 = \mathbb{K}[q]\omega$. □

Ainsi, le complexe de Chevalley-Eilenberg \mathfrak{A} se rétracte par déformation sur le complexe réduit $\mathfrak{A}_{\text{red}}$, ayant la même cohomologie. Notons $i : \mathfrak{A}_{\text{red}} \rightarrow \mathfrak{A}$ et $\text{pr}_{\mathfrak{A}_{\text{red}}} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_{\text{red}}$ l'inclusion et la projection canonique.

Théorème 4.3.2 *Le complexe de cochaînes $(\mathfrak{A}_{\text{red}}, \delta_{CE})$ est un rétracte par déformation de $(\mathfrak{A}, \delta_{CE})$ i.e. il existe une homotopie h de degré -1 entre $\text{id}_{\mathfrak{A}}$ et $\text{pr}_{\mathfrak{A}_{\text{red}}}$,*

$$(\mathfrak{A}_{\text{red}}, \delta_{CE}|_{\mathfrak{A}_{\text{red}}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{\text{pr}_{\mathfrak{A}_{\text{red}}}} \end{array} (\mathfrak{A}, \delta_{CE}) \quad \curvearrowright h, \quad (4.3.2)$$

application vérifiant $\delta_{CE}h + h\delta_{CE} = \text{id}_{\mathfrak{A}} - \text{pr}_{\mathfrak{A}_{\text{red}}}$.

Preuve. Notant $h_k : \mathfrak{A}^k \rightarrow \mathfrak{A}^{k-1}$, l'application h définie par

$$h = \begin{cases} h_0 = 0 \\ h_1 = 0 \\ h_2(\alpha P) = \alpha E \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

convient, elle vérifie de plus $h\delta_{CE}h = h$. □

4.4 CALCUL DE LA STRUCTURE L_∞

On va étudier les équations de formalité (2.3.8), en travaillant sur $\mathfrak{A}[2]$. Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, on a $D = D_2, [\ , \]'_s \equiv 0$ donc $d_2 = 0$, et une section remontant de la cohomologie vers les cocycles est donnée par $\varphi_1 = \text{inc}$ l'inclusion canonique des composantes de la cohomologie dans le complexe de Chevalley-Eilenberg, on l'omettra dans calculs. Pour $y_1, \dots, y_{k+1} \in \mathfrak{a}[2]$, on obtient aux premiers ordres les équations suivantes.

Ordre $k = 0$ $0 = \delta_{CE} \text{inc}$,

Ordre $k = 1$

$$0 = \delta_{CE} \varphi_2(y_1, y_2) + D(y_1, y_2), \quad (4.4.1)$$

Ordre $k = 2$

$$\begin{aligned} d_3(y_1, y_2, y_3) &= \delta_{CE} \varphi_3(y_1, y_2, y_3) + D(y_1, \varphi_2(y_2, y_3)) \\ &\quad + (-1)^{|y_2||y_3|} D(y_2, \varphi_2(y_1, y_3)) \\ &\quad + (-1)^{|y_3|(|y_1|+|y_2|)} D(y_3, \varphi_2(y_1, y_2)) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[q]$. Comme φ_2 est de degré 0, il suffit de considérer à l'ordre $k = 1$ des éléments $y_1 = \alpha \mathbf{1}$ et $y_2 = \beta \omega$. En écrivant $\varphi_2(\alpha \mathbf{1}, \beta \omega) = \gamma E$, avec $\gamma \in \mathbb{K}[q]$, on a $\delta_{CE} \varphi_2(\alpha \mathbf{1}, \beta \omega) = [P, \gamma E]_s = \gamma P$ donc

$$\delta_{CE} \varphi_2(\alpha \mathbf{1}, \beta \omega) + D(\alpha \mathbf{1}, \beta \omega) = 0 \Rightarrow \gamma P = \alpha' \beta P.$$

On peut ainsi choisir de définir l'application symétrique graduée $\varphi_2 : \mathfrak{a}[2] \rightarrow \mathfrak{A}[2]$ par

$$\begin{aligned} \varphi_2(\alpha \mathbf{1}, \beta \mathbf{1}) &= 0 \\ \varphi_2(\alpha \mathbf{1}, \beta \omega) &= \alpha' \beta E \\ \varphi_2(\alpha \omega, \beta \omega) &= 0 \end{aligned}$$

Plus généralement, $\varphi_n : \mathfrak{a}[2]^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{A}[2]$ étant de degré 0, pour $i_1, \dots, i_n \in \{-2, 1\}$, $\varphi_n(\mathfrak{a}[2]^{i_1}, \dots, \mathfrak{a}[2]^{i_n}) \subset \mathfrak{A}[2]^{i_1 + \dots + i_n}$ ainsi, en choisissant p éléments de degré -2 et $n-p$ éléments de degré 1, l'image de φ_n est dans la composante de degré $1(n-p) - 2p = n - 3p$. En se restreignant à la sous-algèbre $\mathfrak{A}_{\text{red}}[2]$, on a $-2 \leq n - 3p \leq 1 \Leftrightarrow n - 1 \leq 3p \leq n + 2$. À l'ordre $k = 2$, l'application φ_3 prend en argument $p = 1$ ($2 \leq 3p \leq 5$) élément de degré -2 , noté $y_1 = \alpha \mathbf{1}$ et les autres éléments de degré 1, $y_2 = \beta_2 \omega, y_3 = \beta_3 \omega$, avec $\alpha, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{K}[q]$.

Le membre droit de l'équation (4.4.2) s'écrit alors, en utilisant les identités du Lemme 4.2.2

$$\begin{aligned} &\delta_{CE}(\varphi_3(\alpha \mathbf{1}, \beta_2 \omega, \beta_3 \omega)) \\ &\quad + (-1)^1 (-1)^{1 \times (-2)} [\beta_2 \omega, \varphi_2(\alpha \mathbf{1}, \beta_3 \omega)]_s + (-1)^1 (-1)^{1 \times (-2+1)} [\beta_3 \omega, \varphi_2(\alpha \mathbf{1}, \beta_2 \omega)]_s \\ &= \delta_{CE}(\varphi_3(\alpha \mathbf{1}, \beta_2 \omega, \beta_3 \omega)) - [\beta_2 \omega, \alpha' \beta_3 E]_s + [\beta_3 \omega, \alpha' \beta_2 E]_s \\ &= \delta_{CE}(\varphi_3(\alpha \mathbf{1}, \beta_2 \omega, \beta_3 \omega)) + 4q \alpha' (\beta_2' \beta_3 - \beta_2 \beta_3') \omega \end{aligned}$$

et le multiple de ω n'est pas un cobord. Ceci montre la non formalité dans ce cas.

Théorème 4.4.1 *Le complexe de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ n'est pas formel.*

Preuve. Dans le membre droit de l'équation (4.4.2), le multiple (non nul) de ω ne peut s'écrire sous la forme $\delta_{CE}(\alpha P)$ car $[P, \alpha P]_s = 0$. Ainsi, on ne peut choisir une application φ_3 qui annulerait le terme en ω . Si on choisit dans (4.4.1) une autre application $\varphi'_2 = \varphi_2 + \chi_2$, alors $\delta_{CE}(\chi_2) = 0$. Comme $\chi_2 \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) = \{0\}$, c'est un cobord $\chi_2 = \delta_{CE}(f)$, avec $f \in C_{CE}^0(\mathfrak{g}, \mathcal{S}\mathfrak{g}) = \mathcal{S}\mathfrak{g}$. Mais alors

$$\begin{aligned} D(y_i, \chi_2(y_j, y_k)) &= (-1)^{|y_i|} [y_i, [P, f(y_j, y_k)]_s]_s \\ &= -[P, [y_i, f(y_j, y_k)]_s]_s \\ &= (-1)^{|y_i|+1} \delta_{CE} D(y_i, f(y_j, y_k)) \end{aligned}$$

puisque $[P, y_i]_s = 0$, et dans l'équation (4.4.2), ceci ne modifie que le terme φ_3 ; ce qui ne permet toujours pas d'annuler d_3 . \square

Pour obtenir un morphisme L_∞ , il faut donc que la différentielle de la cohomologie contienne des composantes d'arité supérieures. Considérer l'ordre 3 est suffisant.

Théorème 4.4.2 *Il existe une structure L_∞ sur $(\mathfrak{a}[1], \bar{d})$ induite par $d = d_3$ et un morphisme L_∞ induit par $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ noté $\bar{\varphi} : \mathcal{S}(\mathfrak{a}[2]) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{A}[2])$ tels que $\delta_{CE} + \bar{D} \circ \bar{\varphi} = \bar{\varphi} \circ \bar{d}$.*

Preuve. En utilisant le Théorème 2.5.7 sur la contraction

$$\mathfrak{a}[1] \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{p} \end{array} (\mathfrak{A}[1], \delta_{CE}) \quad \curvearrowright h,$$

on a

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \bar{\psi}_1 \circ \bar{D}_2 \circ \sum_{n \in \mathbb{N}} (-\eta \circ \bar{D}_2)^n \circ \bar{\varphi}_1 = \bar{\psi}_1 \circ \bar{D}_2 \circ \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-\eta \circ \bar{D}_2)^n \circ \bar{\varphi}_1 \end{aligned}$$

avec $\psi_1 = p[1]$ et $\varphi_1 = i[1]$.

Soit $T_3 := \alpha \mathbf{1} \bullet \beta_2 \omega \bullet \beta_3 \omega \in \mathcal{S}(V[1])$. Comme $\bar{\varphi}_1 = id_{\mathcal{S}(H[1])}$, on a

$$\varphi_3 = \text{pr}_{V[1]} \circ \bar{\varphi}|_3 = \text{pr}_{V[1]} \circ \sum_{n \in \mathbb{N}} (-\eta \circ \bar{D}_2)^n$$

et

$$\varphi_3(T_3) = \text{pr}_{V[1]}(\alpha \mathbf{1} \bullet \beta_2 \omega \bullet \beta_3 + \alpha' \beta_2 E \bullet \beta_3 \omega - \alpha' \beta_3 E \bullet \beta_2 \omega) = 0,$$

car $D_2(\alpha \mathbf{1}, \beta_i \omega) = -\alpha' \beta_i P$ et $\bar{h}(\gamma P) = \gamma E$, les puissances $(-\eta \circ \overline{D_2})^n$ sont nulles pour $n \geq 2$ car D_2 donne des multiples de $E \bullet \omega$ et η (défini avec \bar{h}) est non nul seulement sur des mots en P ; finalement la projection sur $V[1] = \mathcal{S}^1(V[1])$ est nulle puisque les éléments considérés sont des mots de longueur strictement plus grande que 1.

En utilisant que $D_2(\alpha E, \beta \omega) = [\beta \omega, \alpha E]_s$, le calcul du terme d_3 redonne la même expression que celle trouvée précédemment.

$$\begin{aligned} d_3(T_3) &= \psi_1 \circ \overline{D_2} \circ \overline{\varphi}|_3(T_3) \\ &= \psi_1(-\alpha' \beta_2 P \bullet \beta_3 \omega + \alpha' \beta_3 P \bullet \beta_2 \omega + D_2(\alpha' \beta_2 E, \beta_3 \omega) - D_2(\alpha' \beta_3 E, \beta_2 \omega)) \\ &= 4q\alpha'(\beta'_2 \beta_3 - \beta_2 \beta'_3)\omega \end{aligned}$$

Plus généralement, les compositions successives $(-\eta \circ \overline{D_2})^n$ sur l'élément $T = \alpha_1 \mathbf{1} \bullet \dots \bullet \alpha_k \mathbf{1} \bullet \beta_1 \omega \bullet \dots \bullet \beta_l \omega \in \mathcal{S}(H[1]) \otimes \mathcal{S}(W[1])$ avec $k \geq 2$ finissent par s'annuler à cause des valeurs que prend D_2 et de la définition de l'homotopie h intervenant dans η . Ainsi, $\varphi_p(T) = 0$ pour $p \geq 3$ et $d_p(T) = \psi_1 \circ \overline{D_2} \circ \overline{\varphi}|_p(T) = 0$ pour $p \geq 4$ avec $k \geq 2$. \square

DEUXIÈME PARTIE

STRUCTURES HOM-ALGÈBRIQUES

CONTENU DE LA PARTIE

5	DÉFORMATION DES HOM-(CO)ALGÈBRES	81
5.1	ALGÈBRES HOM-ASSOCIATIVES ET HOM-LIE	82
5.2	HOM-COGÈBRES, HOM-BIGÈBRES ET ALGÈBRES HOM-HOPF	89
5.3	COGÈBRES ET BIGÈBRES HOM-LIE	94
6	STRUCTURES HOM-(CO)POISSON	99
6.1	ALGÈBRE HOM-POISSON	100
6.2	STRUCTURES À UNE SEULE OPÉRATION BINAIRE	104
6.3	ALGÈBRES HOM-COPOISSON ET DUALITÉ	107
7	DÉFORMATION ET QUANTIFICATION DE HOM-ALGÈ- BRES	113
7.1	HOM-DÉFORMATION FORMELLE	114
7.2	QUANTIFICATION ET TWISTS DE \star -PRODUITS	116

INTRODUCTION DE LA SECONDE PARTIE

DANS cette seconde partie, on présente diverses structures Hom-algébriques et des moyens pour les déformer. La principale caractéristique des structures de Hom-algèbre et de Hom-cogèbre est le fait que les identités classiques sont déformées par un endomorphisme. La majeure partie de cette seconde partie a été prépubliée dans l'article [BEM12].

On rappelle dans un premier temps (Chapitre 5) les définitions des algèbres Hom-associatives et Hom-Lie, ainsi que des structures duales correspondantes ; quelques exemples sont donnés.

La dualité et la déformation par twist sont deux principes permettant d'obtenir, à partir de Hom-structures initiales, d'autres de même type. On explicite sous quelles conditions cela est possible, et on calcule de tels morphismes de twist sur des exemples.

Les algèbres Hom-Poisson ont été introduites dans [MS10b], où elles apparaissent de façon naturelle dans l'étude des déformations formelles à un paramètre d'algèbres Hom-associatives commutatives. Ensuite, cette structure a été étudiée dans [Yau10b]. Il y est montré que la catégorie des algèbres de Hom-Poisson est fermée sous déformation par twist, et fermée pour le produit tensoriel. De plus, les algèbres Hom-Poisson (dé)polarisées sont équivalentes aux algèbres Hom-Poisson admissibles, qui n'ont chacune qu'une seule opération binaire.

Le principe de twist est aussi valable, on l'utilise pour déformer l'algèbre de Sklyanin dans l'Exemple 6.1.5. La Section 6.1.4 montre comment construire des algèbres Hom-Poisson à partir d'algèbres Hom-Lie en dimension finie, et présente de telles constructions sur des exemples en dimension 3. La Section 6.2 présente la notion de Hom-algèbre flexible, plus générale que celle d'algèbre Hom-associative, et montre ses liens avec les algèbres Hom-Poisson (à une opération). Les structures Hopf Hom-coPoisson sont également définies Section 6.3. Le Théorème 6.3.5 établit une correspondance entre les algèbres enveloppantes d'algèbres Hom-Lie possédant une structure Hom-coPoisson et les bigèbres Hom-Lie. La dualité entre algèbres coPoisson Hopf et algèbre Poisson-Hopf est étendue au cadre Hom dans le Théorème 6.3.8.

Dans le Chapitre 7, on donne les définitions de déformations formelles qui ont été étendues pour les algèbres Hom-associatives, les Hom-cogèbres et Hom-bigèbres. On étudie enfin le cas du \star -produit de Moyal-Weyl correspondant à la quantification du crochet de Poisson de l'espace des phases. La Proposition 7.2.6 montre

que les morphismes de twist qui déforment le crochet de Poisson de l'espace des phases (de dimension 2) ont un jacobien égal à 1. Pour obtenir des morphismes de twist déformant le \star -produit, on quantifie les automorphismes de Poisson en modifiant une équation différentielle qu'ils vérifient.

5

DÉFORMATION DE STRUCTURES : HOM-ALGÈBRES ET HOM-COGÈBRES

SOMMAIRE

5.1	ALGÈBRES HOM-ASSOCIATIVES ET HOM-LIE	82
5.1.1	Définitions	82
5.1.2	Exemples	84
5.1.3	Principe de twist	84
5.1.4	Construction d'algèbres Hom-Lie	85
5.2	HOM-COGÈBRES, HOM-BIGÈBRES ET ALGÈBRES HOM-HOPF	89
5.2.1	Hom-cogèbres et dualité	89
5.2.2	Hom-bigèbre et algèbre Hom-Hopf	93
5.3	COGÈBRES ET BIGÈBRES HOM-LIE	94

DANS ce qui suit, on présente brièvement les définitions et propriétés des Hom-structures usuelles ; on présentera quelques exemples et on rappellera le principe de déformation par twist qui permet de déformer une structure classique en Hom-structure à l'aide d'un morphisme d'algèbres. La dualité entre algèbres et cogèbres est également valable pour les Hom-structures.

5.1 ALGÈBRES HOM-ASSOCIATIVES ET HOM-LIE

Par la suite, \mathbb{K} dénotera un corps de caractéristique 0 et A un \mathbb{K} -espace vectoriel. On notera σ l'application linéaire $\sigma : A^{\otimes 3} \rightarrow A^{\otimes 3}$, définie par $\sigma(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = x_2 \otimes x_3 \otimes x_1$ et par τ_{ij} les applications linéaires $\tau : A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes n}$ où $\tau_{ij}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n)$.

Une Hom-algèbre désigne un triplet (A, μ, α) dans lequel $\mu : A^{\otimes 2} \rightarrow A$ est une application bilinéaire et $\alpha : A \rightarrow A$ un endomorphisme appelé twist. L'application bilinéaire $\mu^{op} : A^{\otimes 2} \rightarrow A$ désigne l'application opposée, i.e. $\mu^{op} = \mu \circ \tau_{12}$. Une Hom-cogèbre est un triplet (A, Δ, α) dans lequel $\Delta : A \rightarrow A^{\otimes 2}$ est une application linéaire et $\alpha : A \rightarrow A$ un endomorphisme appelé twist. L'application linéaire $\Delta^{op} : A \rightarrow A^{\otimes 2}$ désigne l'application opposée, i.e. $\Delta^{op} = \tau_{12} \circ \Delta$. Pour un endomorphisme $\alpha : A \rightarrow A$, on note α^n la composition de n copies de α , avec $\alpha^0 = id$. Une Hom-algèbre (A, μ, α) (resp. une Hom-cogèbre (A, Δ, α)) est dite *multiplicative* si $\alpha \circ \mu = \mu \circ \alpha^{\otimes 2}$ (resp. $\alpha^{\otimes 2} \circ \Delta = \Delta \circ \alpha$). La Hom-algèbre est dite *commutative* si $\mu = \mu^{op}$ et la Hom-cogèbre est dite *cocommutative* si $\Delta = \Delta^{op}$.

Les algèbres ou cogèbres classiques sont considérées comme des Hom-algèbres ou Hom-cogèbres munies de l'endomorphisme de twist identité. Pour une Hom-algèbre (A, μ, α) , on utilisera souvent l'abréviation $\mu(x, y) = xy$ pour $x, y \in A$. De même, pour une Hom-cogèbre, (A, Δ, α) , on utilisera la notation de Sweedler $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2$ mais on omettra souvent le symbole de sommation. Quand la Hom-algèbre (resp. la Hom-cogèbre) est multiplicative, on dira aussi que α est multiplicative pour μ (resp. pour Δ).

5.1.1 Définitions

On rappelle les définitions des algèbres Hom-associatives et Hom-Lie.

Définition 5.1.1 Soit (A, μ, α) une Hom-algèbre.

(1) Le Hom-associateur $as_{\mu, \alpha} : A^{\otimes 3} \rightarrow A$ est défini par

$$as_{\mu, \alpha} = \mu \circ (\mu \otimes \alpha - \alpha \otimes \mu). \quad (5.1.1)$$

(2) La Hom-algèbre A est une *algèbre Hom-associative* si elle satisfait l'identité de Hom-associativité

$$as_{\mu, \alpha} = 0. \quad (5.1.2)$$

- (3) Une algèbre Hom-associative A est dite *unitaire* s'il existe une application linéaire $\eta : \mathbb{K} \rightarrow A$ telle que

$$\mu \circ (id_A \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes id_A) = \alpha. \quad (5.1.3)$$

L'élément unité est $1_A = \eta(1)$.

- (4) Le Hom-Jacobien $J_{\mu,\alpha} : A^{\otimes 3} \rightarrow A$ est défini par

$$J_{\mu,\alpha} = \mu \circ (\alpha \otimes \mu) \circ (id + \sigma + \sigma^2). \quad (5.1.4)$$

- (5) La Hom-algèbre A est une *algèbre Hom-Lie* si elle satisfait $\mu + \mu^{op} = 0$ et l'identité de Hom-Jacobi

$$J_{\mu,\alpha} = 0. \quad (5.1.5)$$

On retrouve les définitions usuelles de l'associateur, d'une algèbre associative, du Jacobien et d'une algèbre de Lie quand le morphisme de twist α est l'application identité. En termes d'éléments $x, y, z \in A$, le Hom-associateur et le Hom-Jacobien sont donnés par

$$\begin{aligned} \text{as}_{\mu,\alpha}(x, y, z) &= (xy)\alpha(z) - \alpha(x)(yz), \\ J_{\mu,\alpha}(x, y, z) &= \bigcirc_{x,y,z} [\alpha(x), [y, z]], \end{aligned}$$

où le crochet représente la multiplication et ou $\bigcirc_{x,y,z}$ indique une somme cyclique sur x, y, z .

Soient $A = (A, \mu, \alpha)$ et $A' = (A', \mu', \alpha')$ deux Hom-algèbres. Une application linéaire $f : A \rightarrow A'$ est un *morphisme de Hom-algèbres* si

$$\mu' \circ (f \otimes f) = f \circ \mu \quad \text{et} \quad f \circ \alpha = \alpha' \circ f.$$

On dit que c'est un *morphisme faible* si seule la première condition est vérifiée.

Proposition 5.1.2 [MS08, Proposition 1.6] À chaque algèbre Hom-associative (A, μ, α) , on peut associer une algèbre Hom-Lie dont le crochet est défini pour tous $x, y, z \in A$ par $[x, y] = \mu(x, y) - \mu(y, x)$.

Preuve. Ce crochet est bien sûr antisymétrique et un calcul direct donne

$$\begin{aligned} & [\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(y), [z, x]] + [\alpha(z), [x, y]] \\ &= \mu(\alpha(x), \mu(y, z)) - \mu(\alpha(x), \mu(z, y)) - \mu(\mu(y, z), \alpha(x)) + \mu(\mu(z, y), \alpha(x)) \\ & \quad + \mu(\alpha(y), \mu(z, x)) - \mu(\alpha(y), \mu(x, z)) - \mu(\mu(z, x), \alpha(y)) + \mu(\mu(x, z), \alpha(y)) \\ & \quad + \mu(\alpha(z), \mu(x, y)) - \mu(\alpha(z), \mu(y, x)) - \mu(\mu(x, y), \alpha(z)) + \mu(\mu(y, x), \alpha(z)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

5.1.2 Exemples

Exemple 5.1.3 Soit $\{x_1, x_2, x_3\}$ une base d'un espace vectoriel A de dimension trois sur \mathbb{K} . La multiplication suivante μ et le morphisme α sur $A = \mathbb{K}^3$ définissent une algèbre Hom-associative sur \mathbb{K} .

$$\begin{aligned}\mu(x_1, x_1) &= ax_1, & \mu(x_2, x_2) &= ax_2, \\ \mu(x_1, x_2) &= \mu(x_2, x_1) = ax_2, & \mu(x_2, x_3) &= bx_3, \\ \mu(x_1, x_3) &= \mu(x_3, x_1) = bx_3, & \mu(x_3, x_2) &= \mu(x_3, x_3) = 0,\end{aligned}$$

$$\alpha(x_1) = ax_1, \quad \alpha(x_2) = ax_2, \quad \alpha(x_3) = bx_3$$

où a, b sont des paramètres dans \mathbb{K} . Cette algèbre n'est pas associative quand $a \neq b$ et $b \neq 0$, puisque

$$\mu(\mu(x_1, x_1), x_3) - \mu(x_1, \mu(x_1, x_3)) = (a - b)bx_3.$$

Exemple 5.1.4 (Jackson $\mathfrak{sl}(2)$) L'algèbre $\mathfrak{sl}(2)$ de Jackson est une q -déformation de l'algèbre de Lie classique $\mathfrak{sl}(2)$. Elle est munie d'une structure d'algèbre Hom-Lie (qui n'est pas une structure d'algèbre de Lie) en utilisant des dérivations de Jackson. Elle est définie par rapport à une base $\{e, f, h\}$ par les crochets et une application linéaire α (non multiplicative) vérifiant

$$\begin{aligned}[h, e] &= 2e, & \alpha(e) &= qe, \\ [h, f] &= -2qf, & \alpha(f) &= q^2f, \\ [e, f] &= \frac{q+1}{2}h, & \alpha(h) &= qh,\end{aligned}$$

où q est un paramètre dans \mathbb{K} . Si $q = 1$ on retrouve la structure $\mathfrak{sl}(2)$ classique.

5.1.3 Principe de twist

La proposition suivante donne un moyen aisé permettant de déformer des structures usuelles en Hom-structures.

Théorème 5.1.5 ([Yau09b, Theorem 2.4])

- (1) Soit $A = (A, \mu)$ une algèbre associative et $\alpha : A \rightarrow A$ une application linéaire qui est multiplicative par rapport à μ , i.e. $\alpha \circ \mu = \mu \circ \alpha^{\otimes 2}$. Alors $A_\alpha = (A, \mu_\alpha = \alpha \circ \mu, \alpha)$ est une algèbre Hom-associative.
- (2) Soit $A = (A, [,])$ une algèbre de Lie et $\alpha : A \rightarrow A$ une application linéaire qui est multiplicative par rapport à $[,]$, i.e. $\alpha \circ [,] = [,] \circ \alpha^{\otimes 2}$. Alors $A_\alpha = (A, [,]_\alpha = \alpha \circ [,], \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie.

Preuve. (1) On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{as}_{\mu_\alpha, \alpha} &= \mu_\alpha \circ (\mu_\alpha \otimes \alpha - \alpha \otimes \mu_\alpha) \\ &= \alpha \circ \mu \circ \alpha^{\otimes 2} \circ (\mu \otimes id - id \otimes \mu) \\ &= \alpha^2 \circ \mathfrak{as}_{\mu, id} = 0, \end{aligned}$$

comme (A, μ) est associative, ainsi A_α est une algèbre Hom-associative.

(2) On a $\forall x, y \in A$, $[y, x] = -[x, y]$ et

$$\begin{aligned} J_{[,]_\alpha, \alpha} &= [,]_\alpha \circ (\alpha \otimes [,]_\alpha) \circ (id + \sigma + \sigma^2) \\ &= \alpha \circ [,] \circ \alpha^{\otimes 2} \circ (id \otimes [,]) \circ (id + \sigma + \sigma^2) \\ &= \alpha^2 \circ J_{[,], id} = 0, \end{aligned}$$

comme $[,]$ est un crochet de Lie, ainsi A_α est une algèbre Hom-Lie. □

En particulier, si $\alpha : A \rightarrow A$ est un morphisme de l'algèbre (associative ou de Lie) (A, μ) , alors c'est également un morphisme de la Hom-algèbre A_α .

Remarque 5.1.6 Plus généralement, les catégories d'algèbres Hom-associatives et Hom-Lie sont fermées sous déformation par des endomorphismes faibles. Si $A = (A, \mu, \alpha)$ est une algèbre Hom-associative (resp. Hom-Lie) et β un morphisme faible, alors $A_\beta = (A, \mu_\beta = \beta \circ \mu, \beta \circ \alpha)$ est encore Hom-associative (resp. Hom-Lie), voir [Yau10b].

Pour une algèbre associative (resp. de Lie) (A, μ) , si $\alpha : A \rightarrow A$ est un morphisme, c'est une application linéaire multiplicative pour la structure μ . Le principe de twist permet donc de construire une algèbre Hom-associative (resp. Hom-Lie) $(A, \mu_\alpha = \alpha \circ \mu, \alpha)$. Si l'endomorphisme α est un automorphisme, la notion de Hom-algèbre est équivalente à la donnée d'une algèbre et d'un automorphisme de cette algèbre. On obtient par contre des structures différentes si α n'est pas inversible.

Cependant, les Hom-algèbres ne proviennent pas forcément de twists des structures classiques. L'application linéaire de l'Exemple 5.1.4 de l'algèbre Hom-Lie Jackson $\mathfrak{sl}(2)$ n'est pas un morphisme pour le crochet défini.

5.1.4 Construction d'algèbres Hom-Lie

On présente différentes manières de construire des algèbres Hom-Lie. On utilise l'algèbre de Lie usuelle $\mathfrak{sl}(2)$ comme point de départ dans les différents cas, mais on peut effectuer les mêmes

constructions de façon plus générale. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ est de dimension 3, engendrée par les éléments e, f, h et les relations

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Par principe de twist

Pour utiliser le principe de twist précédent, il faut déterminer les morphismes de l'algèbre de Lie de départ. Pour $\mathfrak{sl}(2)$ qui est simple, un endomorphisme $\alpha : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{sl}(2)$ a un noyau qui est un idéal réduit à $\{0\}$ ou bien qui est tout $\mathfrak{sl}(2)$. Dans le premier cas α est un automorphisme, dans le second $\alpha \equiv 0$.

Jacobson détermine dans [Jac62, Theorem 5, p. 283] le groupe des automorphismes de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$: c'est l'ensemble des applications

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2) &\rightarrow \mathfrak{sl}(2) \\ X &\mapsto A^{-1}XA \end{aligned} \quad \text{avec } A \in SL(2, \mathbb{K}).$$

L'énoncé est donné pour un corps \mathbb{K} de caractéristique nulle algébriquement clos, mais le résultat est encore vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemple 5.1.7 En considérant la représentation matricielle de $\mathfrak{sl}(2)$ avec

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2)$, on obtient des versions Hom-Lie $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ de $\mathfrak{sl}(2)$, avec α donné par

$$\alpha(e) = A^{-1} \cdot e \cdot A = \begin{pmatrix} cd & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix} = d^2 e - c^2 f + cdh$$

$$\alpha(f) = A^{-1} \cdot f \cdot A = \begin{pmatrix} -ab & -b^2 \\ a^2 & ab \end{pmatrix} = -b^2 e + a^2 f - abh$$

$$\alpha(h) = A^{-1} \cdot h \cdot A = \begin{pmatrix} bc + ad & 2bd \\ -2ac & -bc - ad \end{pmatrix} = 2bde - 2acf + (bc + ad)h.$$

En spécifiant les paramètres, on trouve des exemples plus simples de versions Hom-Lie de $\mathfrak{sl}(2)$. En prenant $c = b = 0$, on a $d = \frac{1}{a}$, et posant $\lambda = d^2$,

$$\begin{aligned} [h, e]_\alpha &= 2\lambda e, & \alpha(e) &= \lambda e, \\ [h, f]_\alpha &= -2\lambda^{-1} f, & \alpha(f) &= \lambda^{-1} f, \\ [e, f]_\alpha &= h, & \alpha(h) &= h; \end{aligned}$$

en prenant $a = d = 0$, on a $c = -\frac{1}{b}$, et posant $\lambda = -c^2$

$$\begin{aligned} [h, e]_\alpha &= 2\lambda f, & \alpha(e) &= \lambda f, \\ [h, f]_\alpha &= -2\lambda^{-1} e, & \alpha(f) &= \lambda^{-1} e, \\ [e, f]_\alpha &= -h, & \alpha(h) &= -h. \end{aligned}$$

Avec des σ -dérivations

La méthode originelle utilisée dans [HLS06] pour déformer les algèbres de Witt et Virasoro, et qui a conduit à la définition d'algèbres Hom-Lie, utilise des opérateurs de σ -dérivation. Cette méthode donne également des déformations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ en algèbres Hom-Lie. On s'inspire du résumé exposé dans [MS10a].

Soit A une \mathbb{K} -algèbre commutative associative unitaire. On note σ un endomorphisme de A . Une σ -dérivation sur A est une application \mathbb{K} -linéaire $\partial_\sigma : A \rightarrow A$ vérifiant une identité de Leibniz twistée par σ :

$$\partial_\sigma(ab) = \partial_\sigma(a)b + \sigma(a)\partial_\sigma(b). \quad (5.1.6)$$

On note $\text{Der}_\sigma(A)$ le A -module des σ -dérivations de A . Pour un homomorphisme $\sigma : A \rightarrow A$, une σ -dérivation $\partial_\sigma \in \text{Der}_\sigma(A)$ et un élément $\delta \in A$ fixés, on suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites.

$$\sigma(\text{Ann}(\partial_\sigma)) \subseteq \text{Ann}(\partial_\sigma), \quad (5.1.7)$$

$$\partial_\sigma(\sigma(a)) = \delta\sigma(\partial_\sigma(a)), \quad \forall a \in A, \quad (5.1.8)$$

où $\text{Ann}(\partial_\sigma) = \{a \in A, a \cdot \partial_\sigma = 0\}$. Soit $A \cdot \partial_\sigma = \{a \cdot \partial_\sigma, a \in A\}$ le sous- A -module cyclique de $\text{Der}_\sigma(A)$ engendré par ∂_σ et étendons σ à $A \cdot \partial_\sigma$ par $\sigma(a \cdot \partial_\sigma) = \sigma(a) \cdot \partial_\sigma$.

Le théorème suivant, provenant de [HLS06], munit $A \cdot \partial_\sigma$ d'une structure de \mathbb{K} -algèbre, en faisant une algèbre quasi-Hom-Lie.

Théorème 5.1.8 ([HLS06, Theorem 3 p. 11]) *Si $\sigma(\text{Ann}(\partial_\sigma)) \subseteq \text{Ann}(\partial_\sigma)$, alors l'application bilinéaire $[\cdot, \cdot]_\sigma$ définie pour $a, b \in A$ par*

$$[a \cdot \partial_\sigma, b \cdot \partial_\sigma]_\sigma := (\sigma(a) \cdot \partial_\sigma) \circ (b \cdot \partial_\sigma) - (\sigma(b) \cdot \partial_\sigma) \circ (a \cdot \partial_\sigma) \quad (5.1.9)$$

est bien définie sur le \mathbb{K} -espace vectoriel $A \cdot \partial_\sigma$. Elle vérifie les identités suivantes pour $a, b, c \in A$,

$$[a \cdot \partial_\sigma, b \cdot \partial_\sigma]_\sigma = (\sigma(a)\partial_\sigma(b) - \sigma(b)\partial_\sigma(a)) \cdot \partial_\sigma, \quad (5.1.10)$$

$$[a \cdot \partial_\sigma, b \cdot \partial_\sigma]_\sigma = -[b \cdot \partial_\sigma, a \cdot \partial_\sigma]_\sigma, \quad (5.1.11)$$

et de plus, si (5.1.8) est vérifiée, on a l'identité de Jacobi à six termes suivante

$$\bigcirc_{a,b,c} \left([\sigma(a) \cdot \partial_\sigma, [b \cdot \partial_\sigma, c \cdot \partial_\sigma]_\sigma]_\sigma + \delta \cdot [a \cdot \partial_\sigma, [b \cdot \partial_\sigma, c \cdot \partial_\sigma]_\sigma]_\sigma \right) = 0. \quad (5.1.12)$$

On applique ceci à la représentation de $\mathfrak{sl}(2)$ en termes d'opérateurs différentiels agissant sur un espace vectoriel A de fonctions en t .

$$e \mapsto \partial, \quad h \mapsto -2t\partial, \quad f \mapsto -t^2\partial.$$

Exemple 5.1.9 On fixe $q \in \mathbb{K}^*$. Soient $A = \mathbb{K}[t]$ et $\sigma : A \rightarrow A$ l'unique endomorphisme défini par $\sigma(t) := qt$, i.e. $\sigma(f(t)) = f(qt)$ pour $f \in A$, et $\partial_\sigma : A \rightarrow A$ la σ -dérivation définie par $\partial_\sigma(t) = t$, i.e. $\partial_\sigma(t^n) = \{n\}_q t^{n-1}$, avec les q -analogues $\{n\}_q = 1 + q + \dots + q^{n-1}$.

Notons S le sous-espace vectoriel de $A \cdot \partial_\sigma$ engendré par les éléments $E := \partial_\sigma$, $H := -2t\partial_\sigma$, $F := -t^2\partial_\sigma$. Pour $\delta = q$, l'équation (5.1.8) est satisfaite, donc avec le précédent crochet $[\cdot, \cdot]_\sigma$ et l'application \mathbb{K} -linéaire $\alpha = \sigma + qid$, $(S, [\cdot, \cdot]_\sigma, \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie, on a

$$\begin{aligned} [H, E]_\sigma &= 2E, & \alpha(E) &= (1+q)E, \\ [H, F]_\sigma &= -2qF, & \alpha(F) &= q(1+q)F, \\ [E, F]_\sigma &= \frac{q+1}{2}H, & \alpha(H) &= 2qH. \end{aligned}$$

Pour $q = 1$, les crochets sont ceux de $\mathfrak{sl}(2)$ mais $\alpha = 2id$.

Exemple 5.1.10 En modifiant légèrement les relations précédentes, on obtient une famille de q -déformations de l'algèbre de Witt. On considère cette fois $A = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, et, avec les notations précédentes, $D := t\partial_\sigma = -\frac{id - \sigma}{q-1}$. Alors

$$\mathcal{D}_q := \text{Der}_\sigma(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} \cdot d_n \quad \text{où} \quad d_n = -t^n \cdot D.$$

Avec le crochet $[\cdot, \cdot] : \mathcal{D}_q \rightarrow \mathcal{D}_q$ défini sur les générateurs par $[d_n, d_m] := (\{n\}_q - \{m\}_q) d_{n+m}$ et l'application linéaire $\alpha = \sigma + id$, avec $\alpha(d_n) = (q^n + 1)d_n$, $(\mathcal{D}_q, [\cdot, \cdot], \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie.

Pour $q = 1$, on retrouve l'algèbre de Witt classique.

Structure Hom-Lie associée à un crochet

Une autre façon de construire des algèbres Hom-Lie est de calculer les différentes applications linéaires possibles α (non nécessairement multiplicatives) pour un crochet donné. On applique cette idée à l'exemple précédent.

Exemple 5.1.11 En considérant les crochets $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2qf$, $[e, f] = \frac{q+1}{2}h$, on cherche les applications α sous forme matricielle $\alpha = (\alpha_{ij})$, vérifiant l'identité de Hom-Jacobi. En calculant sur la base, on résout les équations $\circlearrowleft_{x,y,z} [\alpha(x), [y, z]] = 0$ en les coefficients α_{ij} . On

obtient des algèbres Hom-Lie avec les crochets précédents et l'application α vérifiant

$$\begin{aligned}\alpha(e) &= ae + bf + ch, \\ \alpha(f) &= de + aqf + k\frac{1+q}{4}h, \\ \alpha(h) &= ke + c\frac{4q}{1+q}f + lh,\end{aligned}$$

avec des paramètres $a, b, c, d, k, l \in \mathbb{K}$. Le détail des calculs est donné dans l'annexe Section A.2.

En prenant $b = c = d = k = 0$, $a = 1 + q$, $l = 2q$, on obtient l'Exemple 5.1.9 et pour $b = c = d = k = 0$, $a = l = q$, on retrouve l'Exemple 5.1.4. Ces applications ne sont jamais multiplicatives pour les crochets de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ usuelle, donc les algèbres Hom-Lie ainsi obtenues ne proviennent pas de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2)$ classique par le principe de twist Théorème 5.1.5. Par ailleurs, ces applications ne sont pas non plus multiplicatives pour le crochet considéré.

En particulier, pour $q = 1$, les algèbres Hom-Lie ayant les mêmes crochets que $\mathfrak{sl}(2)$ sont obtenues avec les applications linéaires α suivantes (mentionnées dans [MS10b]),

$$\begin{aligned}\alpha(e) &= ae + bf + ch, \\ \alpha(f) &= de + af + \frac{1}{2}kh, \\ \alpha(h) &= ke + 2cf + lh.\end{aligned}$$

5.2 HOM-COGÈBRES, HOM-BIGÈBRES ET ALGÈBRES HOM-HOPF

Dans cette section, on présente les propriétés basiques des Hom-cogèbres, Hom-bigèbres et algèbres Hom-Hopf qui généralisent les structures usuelles de cogèbres, bigèbres et algèbres de Hopf.

5.2.1 Hom-cogèbres et dualité

Définition 5.2.1 Une *Hom-cogèbre* est un triplet (A, Δ, α) où A est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, $\alpha : A \rightarrow A$ des applications linéaires, Δ est la *comultiplication* ou coproduit.

Une *cogèbre Hom-coassociative* est une Hom-cogèbre vérifiant

$$(\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta. \tag{5.2.1}$$

Une cogèbre Hom-coassociative est dite *counitaire* s'il existe une application linéaire $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant

$$(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \alpha \quad \text{et} \quad (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = \alpha. \quad (5.2.2)$$

Soient (A, Δ, α) et (A', Δ', α') deux Hom-cogèbres (resp. cogèbres Hom-coassociatives). Une application linéaire $f : A \rightarrow A'$ est un *morphisme de Hom-cogèbres* (resp. *morphisme de cogèbres Hom-coassociatives*) si

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f \quad \text{et} \quad f \circ \alpha = \alpha' \circ f,$$

(morphisme faible si seule la première égalité est vérifiée). Si de plus les cogèbres Hom-coassociatives ont des counités ε et ε' , on a aussi $\varepsilon = \varepsilon' \circ f$.

Le théorème suivant montre comment construire une nouvelle cogèbre Hom-coassociative à partir d'une cogèbre Hom-coassociative et d'un morphisme de Hom-cogèbres. On utilise seulement la coassociativité du coproduit de la cogèbre.

Théorème 5.2.2 *Soit $(A, \Delta, \alpha, \varepsilon)$ une Hom-cogèbre counitaire et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme faible de Hom-cogèbres. Alors $(A, \Delta_\beta, \alpha \circ \beta, \varepsilon)$, où $\Delta_\beta = \Delta \circ \beta$, est aussi une cogèbre Hom-coassociative counitaire.*

Preuve. On montre que $(A, \Delta_\beta, \alpha \circ \beta)$ vérifie l'axiome (5.2.1).

En effet, en utilisant $(\beta \otimes \beta) \circ \Delta = \Delta \circ \beta$, on a

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta \otimes \Delta_\beta) \circ \Delta_\beta &= (\alpha \circ \beta \otimes \Delta \circ \beta) \circ \Delta \circ \beta \\ &= ((\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta) \circ \beta^2 \\ &= ((\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta) \circ \beta^2 \\ &= (\Delta_\beta \otimes \alpha \circ \beta) \circ \Delta_\beta. \end{aligned}$$

De plus, l'axiome (5.2.2) est aussi vérifié, puisqu'on a

$$(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta_\beta = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \circ \beta = \alpha \circ \beta = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta \circ \beta = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta_\beta.$$

□

Remarque 5.2.3 Le théorème précédent montre que la catégorie des cogèbres Hom-coassociatives est fermée sous déformation par des morphismes faibles de Hom-cogèbres. Ceci conduit aux exemples suivants.

1. Soient (A, Δ) une cogèbre coassociative et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme de cogèbres. Alors (A, Δ_β, β) est une cogèbre Hom-coassociative.
2. Soient (A, Δ, α) une Hom-cogèbre coassociative multiplicative. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(A, \Delta_{\alpha^n}, \alpha^{n+1})$ est une cogèbre Hom-coassociative.

Dans la suite, on montre qu'il y a une dualité entre les structures Hom-associatives et Hom-coassociatives (voir aussi [SPAS09, MS10a]).

Théorème 5.2.4 *Soit (A, Δ, α) une cogèbre Hom-coassociative. Alors le dual $(A^*, \Delta^*, \alpha^*)$ est une algèbre Hom-associative. De plus A^* est unitaire si A est counitaire.*

Preuve. La multiplication $\mu = \Delta^*$ est définie de $A^* \otimes A^*$ vers A^* par

$$(fg)(x) = \Delta^*(f, g)(x) = \langle \Delta(x), f \otimes g \rangle = (f \otimes g)(\Delta(x)) = \sum_{(x)} f(x_1)g(x_2), \quad \forall x \in A$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre l'espace vectoriel $A \otimes A$ et son dual. Pour $f, g, h \in A^*$ et $x \in A$, on a

$$(fg)\alpha^*(h)(x) = \langle (\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle$$

et

$$\alpha^*(f)(gh)(x) = \langle (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle$$

ainsi, la Hom-associativité $\mu \circ (\mu \otimes \alpha^* - \alpha^* \otimes \mu) = 0$ provient de la Hom-coassociativité $(\Delta \otimes \alpha - \alpha \otimes \Delta) \circ \Delta = 0$.

De plus, si A a une counité ε vérifiant $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \alpha = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta$ alors pour $f \in A^*$ et $x \in A$ on a

$$(\varepsilon f)(x) = \sum_{(x)} \varepsilon(x_1)f(x_2) = \sum_{(x)} f(\varepsilon(x_1)x_2) = f(\alpha(x)) = \alpha^*(f)(x)$$

et

$$(f\varepsilon)(x) = \sum_{(x)} f(x_1)\varepsilon(x_2) = \sum_{(x)} f(x_1\varepsilon(x_2)) = f(\alpha(x)) = \alpha^*(f)(x)$$

ce qui montre que ε est l'unité dans A^* . □

Le dual d'une Hom-algèbre (A, μ, α) n'est pas toujours une Hom-cogèbre, parce que le coproduit n'a pas le bon espace pour but, $\mu^* : A^* \rightarrow (A \otimes A)^* \not\supseteq A^* \otimes A^*$. C'est le cas si la Hom-algèbre est de dimension finie, puisqu'alors $(A \otimes A)^* = A^* \otimes A^*$.

Dans le cas général, pour une algèbre A , on définit son *dual fini*

$$A^\circ = \{f \in A^*, f(I) = 0 \text{ pour un certain idéal cofini } I \text{ de } A\},$$

où un *idéal cofini* I est un idéal $I \subset A$ tel que A/I est de dimension finie.

L'espace A° est un sous-espace de A^* qui est fermé sous la multiplication par des scalaires, et la somme de deux éléments de A° est encore dans A° puisque l'intersection de deux idéaux cofinis est encore un. Si A est de dimension finie, on a bien sûr $A^\circ = A^*$.

Lemme 5.2.5 Soient (A, μ_A, α_A) et (B, μ_B, α_B) deux algèbres Hom-associatives et $f : A \rightarrow B$ un morphisme de Hom-algèbres. Alors l'application duale $f^* : B^* \rightarrow A^*$ vérifie $f^*(B^\circ) \subset A^\circ$.

Preuve. Soit J un idéal cofini de B et $p : B \rightarrow B/J$ la projection canonique. On pose $\tilde{f} = p \circ f : A \rightarrow B/J$.

Remarquons que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A . En effet, pour $x \in A$ on a $f(xf^{-1}(J)) = f(x)f(f^{-1}(J)) = f(x)J \subset J$. Ainsi $xf^{-1}(J) \subset f^{-1}(J)$. De plus $\alpha_A(f^{-1}(J)) = f^{-1}(\alpha_B(J)) \subset f^{-1}(J)$.

La suite

$$0 \rightarrow f^{-1}(J) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\tilde{f}} B/J \rightarrow 0$$

est exacte. Définissons une application $f_\star : A/f^{-1}(J) \rightarrow B/J$ par $f_\star(x+f^{-1}(J)) = f(x)$. Elle induit un isomorphisme $A/f^{-1}(J) \rightarrow \text{Im } \tilde{f}$. Ainsi $A/f^{-1}(J)$ est de dimension finie.

De même, on a $f^*(B^\circ) \subset A^\circ$. En effet, soit $b^* \in B^*$ tel que $\text{Ker}(b^*) \supset J$. Alors $\text{Ker}(f^*(b^*)) \supset f^{-1}(J)$, car

$$\langle f^*(b^*), f^{-1}(J) \rangle = \langle b^*, f(f^{-1}(J)) \rangle = \langle b^*, J \rangle = 0.$$

□

En utilisant ce lemme, on peut montrer de manière similaire à [Swe69, Lemme 6.0.1] que $A^\circ \otimes A^\circ = (A \otimes A)^\circ$ et que le dual $\mu^* : A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$ de la multiplication $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ vérifie $\mu^*(A^\circ) \subset A^\circ \otimes A^\circ$. En effet, pour $f \in A^*$, $x, y \in A$, on a $\langle \mu^*(f), x \otimes y \rangle = \langle f, xy \rangle$. Ainsi, si I est un idéal cofini tel que $f(I) = 0$, alors $I \otimes A + A \otimes I$ est un idéal cofini de $A \otimes A$ sur lequel s'annule $\mu^*(f)$.

Pour une application $f : A \rightarrow B$ on note $f^\circ := f^*|_{B^\circ} : B^\circ \rightarrow A^\circ$. On pose $\Delta := \mu^\circ = \mu^*|_{A^\circ}$ et $\varepsilon : A^\circ \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varepsilon(f) = f(1)$.

Théorème 5.2.6 Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative multiplicative. Alors $(A^\circ, \Delta, \alpha^\circ)$ est une cogèbre Hom-coassociative. De plus, elle est counitaire si A est unitaire.

Preuve. Le coproduit Δ est défini de A° vers $A^\circ \otimes A^\circ$ par

$$\Delta(f)(x \otimes y) = \mu^*|_{A^\circ}(f)(x \otimes y) = \langle \mu(x \otimes y), f \rangle = f(xy), \quad x, y \in A.$$

Pour $f, g, h \in A^\circ$ et $x, y \in A$, on a

$$(\Delta \circ \alpha^\circ) \circ \Delta(f)(x \otimes y \otimes z) = \langle \mu \circ (\mu \otimes \alpha)(x \otimes y \otimes z), f \rangle$$

et

$$(\alpha^\circ \circ \Delta) \circ \Delta(f)(x \otimes y \otimes z) = \langle \mu \circ (\otimes \mu \alpha)(x \otimes y \otimes z), f \rangle$$

ainsi, la Hom-coassociativité $(\Delta \otimes \alpha^\circ - \alpha^\circ \otimes \Delta) \circ \Delta = 0$ provient de la Hom-associativité $\mu \circ (\mu \otimes \alpha - \alpha \otimes \mu) = 0$.

De plus, si A a une unité η vérifiant $\mu \circ (id \otimes \eta) = \alpha = \mu \circ (\eta \otimes id)$ alors pour $f \in A^\circ$ et $x \in A$ on a

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(f)(x) = f(1.x) = f(\alpha(x)) = \alpha^\circ(f)(x)$$

et

$$(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(f)(x) = f(x.1) = f(\alpha(x)) = \alpha^\circ(f)(x)$$

ce qui montre que $\varepsilon : A^\circ \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto f(1)$ est la counité de A° . \square

Si l'algèbre Hom-associative est de dimension finie, son dual est une cogèbre Hom-coassociative.

5.2.2 Hom-bigèbre et algèbre Hom-Hopf

Définition 5.2.7 Une *Hom-bigèbre* est la donnée de $(A, \mu, \alpha, \eta, \Delta, \beta, \varepsilon)$ où

1. (A, μ, α, η) est une algèbre Hom-associative avec unité η .
2. $(A, \Delta, \beta, \varepsilon)$ est une cogèbre Hom-coassociative avec counité ε .
3. Les applications linéaires Δ et ε sont compatibles avec la multiplication μ et l'unité η , c'est-à-dire

$$\Delta(e) = e \otimes e \quad \text{où } e = \eta(1),$$

$$\Delta(\mu(x \otimes y)) = \Delta(x) \bullet \Delta(y) = \sum_{(x)(y)} \mu(x_1 \otimes y_1) \otimes \mu(x_2 \otimes y_2),$$

$$\varepsilon(e) = 1,$$

$$\varepsilon(\mu(x \otimes y)) = \varepsilon(x)\varepsilon(y),$$

$$\varepsilon \circ \alpha(x) = \varepsilon(x),$$

où le point \bullet représente la multiplication tensorielle.

Si $\alpha = \beta$ la Hom-bigèbre est notée $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$.

En combinant les observations précédentes, avec seulement un morphisme de twist, on obtient les résultats suivants.

Proposition 5.2.8 Soit (A, μ, Δ, α) une Hom-bigèbre multiplicative. Alors le dual fini $(A^\circ, \mu^\circ, \Delta^\circ, \alpha^\circ)$ est également une Hom-bigèbre.

Remarque 5.2.9

1. Pour une Hom-bigèbre $(A, \mu, \alpha, \eta, \Delta, \beta, \varepsilon)$, il est montré dans [SPAS09, MS10a] que l'espace vectoriel $\text{Hom}(A, A)$ avec la multiplication donnée par le produit de convolution possède une structure d'algèbre Hom-associative.
2. Un endomorphisme S de A est une *antipode* si c'est l'inverse de l'identité sur A pour l'algèbre Hom-associative $\text{Hom}(A, A)$

avec la multiplication donnée par le produit de convolution défini par

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

l'unité étant $\eta \circ \varepsilon$.

3. Une *Hom-Hopf algèbre* est une Hom-bigèbre munie d'une antipode.

En réunissant le Théorème 5.1.5 et le Théorème 5.2.2, on obtient la proposition qui suit.

Proposition 5.2.10 *Soit (A, μ, Δ, α) une Hom-bigèbre et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme de Hom-bigèbre commutant avec α . Alors $(A, \mu_\beta, \Delta_\beta, \beta \circ \alpha)$ est une Hom-bigèbre.*

On peut noter que la catégorie des Hom-bigèbres n'est en revanche pas fermée sous déformation par des morphismes faibles de Hom-bigèbres.

Exemple 5.2.11 (Hom-algèbre enveloppante universelle) À une algèbre Hom-associative $A = (A, \mu, \alpha)$ donnée, on peut associer une algèbre Hom-Lie $HLie(A) = (A, [,], \alpha)$ ayant le même espace sous-jacent (A, α) et le crochet $[,] = \mu - \mu^{op}$. Cette construction donne un foncteur $HLie$ des algèbres Hom-associatives vers les algèbres Hom-Lie. Dans l'article [Yau08], Yau a construit le foncteur adjoint à gauche U_{HLie} de $HLie$. Quelques modifications sont faites dans [Yau10a] pour prendre en compte le cas unitaire.

Le foncteur U_{HLie} est défini comme

$$U_{HLie}(A) = F_{HNAs}(A)/I^\infty \quad \text{avec} \quad F_{HNAs}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\tau \in T_n^{wt}} A_\tau^{\otimes n} \quad (5.2.3)$$

pour une algèbre Hom-Lie $(A, [,], \alpha)$. Ici, T_n^{wt} est l'ensemble des n -arbres pondérés qui encode la multiplication des éléments (par des arbres) et les twists par α (par des poids), $A_\tau^{\otimes n}$ est une copie de $A^{\otimes n}$ et I^∞ est un certain sous-espace de relations construit de telle façon que le quotient soit Hom-associatif.

De plus, la comultiplication $\Delta : U_{HLie}(A) \rightarrow U_{HLie}(A) \otimes U_{HLie}(A)$ définie sur A par $\Delta(x) = \alpha(x) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \alpha(x)$ munit l'algèbre Hom-associative $U_{HLie}(A)$ d'une structure de Hom-bigèbre.

5.3 COGÈBRES ET BIGÈBRES HOM-LIE

Comme c'est le cas pour les algèbres Hom-associatives, les algèbres Hom-Lie ont aussi une version duale, les cogèbres Hom-Lie. Elles partagent le même genre de propriétés. On présente ici

les résultats principaux, des résultats analogues peuvent être trouvés dans [Yau09a].

Définition 5.3.1 Une *cogèbre Hom-Lie* (A, Δ, α) est une Hom-cogèbre vérifiant $\Delta + \Delta^{op} = 0$ et l'identité de Hom-coJacobi

$$(id + \sigma + \sigma^2) \circ (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta = 0. \quad (5.3.1)$$

On dit que Δ est un cocrochet.

On retrouve une cogèbre de Lie pour $\alpha = id$. Comme c'est le cas pour les (co)algèbres (co)associatives, on a la propriété de dualité suivante.

Théorème 5.3.2

1. Soit (A, Δ, α) une cogèbre Hom-Lie. Alors $(A^*, \Delta^*, \alpha^*)$ est une algèbre Hom-Lie.
2. Soit $(A, [,], \alpha)$ une algèbre Hom-Lie multiplicative. Alors $(A^\circ, [,]^\circ, \alpha^\circ)$ est une cogèbre Hom-Lie.

Le principe de déformation par twist fonctionne également, ce qui montre que la catégorie des cogèbres Hom-Lie est fermée sous déformation par des morphismes faibles de Hom-cogèbres.

Théorème 5.3.3 Soit (A, Δ, α) une cogèbre Hom-Lie et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme faible de Hom-cogèbres. Alors $(A, \Delta_\beta = \Delta \circ \beta, \alpha \circ \beta)$ est une cogèbre Hom-Lie.

Preuve. On a $\Delta_\beta + \Delta_\beta^{op} = (\Delta + \Delta^{op}) \circ \beta = 0$, et

$$\begin{aligned} (id + \sigma + \sigma^2) \circ (\alpha \circ \beta \otimes \Delta_\beta) \circ \Delta_\beta &= (id + \sigma + \sigma^2) \circ (\alpha \circ \beta \otimes \Delta \circ \beta) \circ \Delta \circ \beta \\ &= (id + \sigma + \sigma^2) \circ (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta \circ \beta^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Le théorème précédent peut être utilisé pour construire des cogèbres Hom-Lie.

Corollaire 5.3.4

1. Soit (A, Δ) une cogèbre de Lie et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme de cogèbres de Lie. Alors (A, Δ_β, β) est une cogèbre Hom-Lie.
2. Soit (A, Δ, α) une cogèbre Hom-Lie multiplicative. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(A, \Delta_{\alpha^n}, \alpha^{n+1})$ est une cogèbre Hom-Lie.

La structure de bigèbre Hom-Lie a été introduite pour la première fois par Yau dans [Yau09a]. La définition présentée ci-dessous est légèrement plus générale. Elle englobe la classe définie par Yau et permet de considérer la condition de compatibilité pour différentes cohomologies d'algèbres Hom-Lie à valeurs dans A .

Définition 5.3.5 Une *bigèbre Hom-Lie* est un uplet $(A, [,], \alpha, \Delta, \beta)$ où

1. $(A, [,], \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie.
2. (A, Δ, β) est une cogèbre Hom-Lie.
3. La condition de compatibilité suivante est vérifiée pour $x, y \in A$:

$$\Delta([x, y]) = ad_{\alpha(x)}(\Delta(y)) - ad_{\alpha(y)}(\Delta(x)), \quad (5.3.2)$$

où l'application adjointe $ad_x : A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes n}$ ($n \geq 2$) est donnée par

$$ad_x(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \sum_{i=1}^n \beta(y_1) \otimes \cdots \otimes \beta(y_{i-1}) \otimes [x, y_i] \otimes \beta(y_{i+1}) \otimes \cdots \otimes \beta(y_n). \quad (5.3.3)$$

Un *morphisme* $f : A \rightarrow A'$ de bigèbres Hom-Lie est une application linéaire qui commute avec α et β telle que $f \circ [,] = [,] \circ f^{\otimes 2}$ et $\Delta \circ f = f^{\otimes 2} \circ \Delta$.

Si $\alpha = \beta = id$ on retrouve des bigèbres de Lie et si $\alpha = \beta$, on obtient la classe définie dans [Yau09a], ces bigèbres Hom-Lie sont notées $(A, [,], \Delta, \alpha)$.

En terme d'éléments, la condition de compatibilité (5.3.2) s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta([x, y]) &= ad_{\alpha(x)}(\Delta(y)) - ad_{\alpha(y)}(\Delta(x)) \\ &= [\alpha(x), y_1] \otimes \beta(y_2) + \beta(y_1) \otimes [\alpha(x), y_2] \\ &\quad - [\alpha(y), x_1] \otimes \beta(x_2) - \beta(x_1) \otimes [\alpha(y), x_2]. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Remarque 5.3.6 Si $\alpha = \beta$, la condition de compatibilité (5.3.4) est équivalente à ce que Δ soit un 1-cocycle par rapport à la cohomologie α^0 -adjointe de l'algèbre Hom-Lie, et pour $\beta = id$, cela correspond à la cohomologie α^{-1} -adjointe, (voir [She11] et [AEM11]).

La Proposition suivante généralise légèrement [Yau09a, Théorème 3.5].

Proposition 5.3.7 Soit $(A, [,], \Delta, \alpha)$ une bigèbre Hom-Lie et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme de bigèbres Hom-Lie commutant avec α . Alors $(A, [,]_\beta = \beta \circ [,], \Delta_\beta = \Delta \circ \beta, \alpha \circ \beta)$ est une bigèbre Hom-Lie.

Preuve. On sait déjà que $(A, [,]_\beta, \beta \circ \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie et que $(A, \Delta_\beta, \alpha \circ \beta)$ est une cogèbre Hom-Lie. Il reste à prouver la condition de compatibilité (5.3.4) pour Δ_β et $[,]_\beta$, avec l'application de twist $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. D'un côté, on a

$$\Delta_\beta([x, y]) = \Delta \circ \beta^2 \circ [x, y] = (\beta^{\otimes 2})^2 \circ \Delta([x, y]),$$

puisque $\Delta \circ \beta = \beta^{\otimes 2} \circ \Delta$. En utilisant de plus $\beta \circ [,] = [,] \circ \beta^{\otimes 2}$ et le fait que α et β commutent, on a

$$\begin{aligned} ad_{\alpha \circ \beta(x)}(\Delta_\beta(y)) &= ad_{\alpha \circ \beta(x)}(\beta(y_1) \otimes \beta(y_2)) \\ &= [\alpha \circ \beta(x), \beta(y_1)]_\beta \otimes \alpha \circ \beta^2(y_2) + \alpha \circ \beta^2(y_1) \otimes [\alpha \circ \beta(x), \beta(y_2)]_\beta \\ &= (\beta^{\otimes 2})^2([\alpha(x), y_1] \otimes \alpha(y_2) + \alpha(y_1) \otimes [\alpha(x), y_2]). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\Delta_\beta([x, y]) = ad_{\alpha \circ \beta(x)}(\Delta_\beta(y)) - ad_{\alpha \circ \beta(y)}(\Delta_\beta(x))$ comme voulu. \square

Comme pour les Hom-bigèbres, la catégorie des bigèbres Hom-Lie n'est pas fermée par déformation sous morphismes faibles de bigèbres Hom-Lie.

Les bigèbres Hom-Lie peuvent être dualisées. On obtient la proposition suivante, généralisant le résultat de [Yau09a] pour le dual fini en utilisant le crochet de dualité.

Proposition 5.3.8 *Soit $(A, [,], \alpha, \Delta, \beta)$ une bigèbre Hom-Lie multiplicative. Alors le dual fini $(A^\circ, [,]^\circ, \alpha^\circ, \Delta^\circ, \beta^\circ)$ est aussi une bigèbre Hom-Lie.*

STRUCTURES HOM-(CO)POISSON

SOMMAIRE

6.1	ALGÈBRE HOM-POISSON	100
6.1.1	Définitions et exemples	100
6.1.2	Principe de twist	101
6.1.3	Application à l'algèbre de Sklyanin	101
6.1.4	Construction d'algèbres Hom-Poisson à partir d'algèbres Hom-Lie	102
6.2	STRUCTURES À UNE SEULE OPÉRATION BINAIRE	104
6.2.1	Hom-algèbres flexibles	104
6.2.2	Lien avec les algèbres Hom-Poisson	105
6.3	ALGÈBRES HOM-COPOISSON ET DUALITÉ	107
6.3.1	Lien avec les bigèbres Hom-Lie	107
6.3.2	Dualité	110

Les algèbres Hom-Poisson vérifient aussi le principe de twist, un tel morphisme est construit pour l'algèbre de Sklyanin. On montre les liens existants entre algèbres Hom-Poisson et structures à une opération, puis on étudie leurs duales, qui sont en relation avec les bigèbres Hom-Lie.

6.1 ALGÈBRE HOM-POISSON

On donne ici la définition des algèbres Hom-Poisson, on montre que le principe de twist reste valable dans ce cas et on expose en dimension finie une méthode permettant de construire des algèbres Hom-Poisson à partir d'algèbre Hom-Lie.

6.1.1 Définitions et exemples

Définition 6.1.1 Une algèbre *Hom-Poisson* est un uplet $(A, \mu, \{, \}, \alpha)$ comprenant

- (1) une algèbre commutative Hom-associative (A, μ, α) et
 - (2) une algèbre Hom-Lie $(A, \{, \}, \alpha)$
- telles que l'identité de Hom-Leibniz

$$\{, \} \circ (\mu \otimes \alpha) = \mu \circ (\alpha \otimes \{, \}) + (\{, \} \otimes \alpha) \circ \tau_{23} \quad (6.1.1)$$

soit vérifiée.

Dans une algèbre Hom-Poisson $(A, \{, \}, \mu, \alpha)$, l'opération $\{, \}$ est appelée *crochet Hom-Poisson*. En termes d'éléments $x, y, z \in A$, l'identité Hom-Leibniz s'écrit

$$\{xy, \alpha(z)\} = \alpha(x)\{y, z\} + \{x, z\}\alpha(y)$$

où $\mu(x, y)$ est abrégé comme usuellement en xy . Par antisymétrie du crochet Hom-Poisson $\{, \}$, l'identité Hom-Leibniz est équivalente à

$$\{\alpha(x), yz\} = \{x, y\}\alpha(z) + \alpha(y)\{x, z\}.$$

On retrouve les algèbres de Poisson quand le morphisme de twist est l'identité.

Définition 6.1.2 Une *bigèbre Hom-Poisson* $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha, \{, \})$ est une algèbre Hom-Poisson $(A, \mu, \{, \}, \alpha)$ qui est aussi une Hom-bigèbre $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$, les deux structures étant compatibles dans le sens que $\{, \}$ est une codérivation le long de μ ,

$$\Delta \circ \{, \} = (\{, \} \otimes \mu + \mu \otimes \{, \}) \circ \Delta^{[2]}.$$

En terme d'éléments, cette condition de compatibilité s'écrit

$$\Delta(\{a, b\}) = \{\Delta(a), \Delta(b)\}$$

où le crochet Hom-Poisson sur $A \otimes A$ est défini par

$$\{a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2\} := \{a_1, b_1\} \otimes a_2 b_2 + a_1 b_1 \otimes \{a_2, b_2\}.$$

On a la même définition pour les algèbres Hom-Poisson Hopf.

Exemple 6.1.3 Soit $\{x_1, x_2, x_3\}$ une base d'un espace vectoriel A de dimension 3 sur \mathbb{K} . La multiplication μ , le crochet antisymétrique $\{, \}$ et l'application linéaire α suivantes définissent sur A une structure d'algèbre Hom-Poisson :

$$\begin{aligned}\mu(x_1, x_1) &= x_1, & \{x_1, x_2\} &= ax_2 + bx_3, \\ \mu(x_1, x_2) &= \mu(x_2, x_1) = x_3, & \{x_1, x_3\} &= cx_2 + dx_3,\end{aligned}$$

$$\alpha(x_1) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3, \quad \alpha(x_2) = \lambda_3 x_2 + \lambda_4 x_3, \quad \alpha(x_3) = \lambda_5 x_2 + \lambda_6 x_3$$

où $a, b, c, d, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ sont des paramètres dans \mathbb{K} .

6.1.2 Principe de twist

Théorème 6.1.4 ([Yau10b, Theorem 3.2]) Soit $A = (A, \mu, \{, \})$ une algèbre de Poisson, et $\alpha : A \rightarrow A$ une application linéaire qui est multiplicative pour μ et pour $\{, \}$. Alors $A_\alpha = (A, \mu_\alpha = \alpha \circ \mu, \{, \}_\alpha = \alpha \circ \{, \}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Poisson.

Preuve. En utilisant le Théorème 5.1.5, on sait déjà que (A, μ_α, α) est une algèbre commutative Hom-associative et que $(A, \{, \}_\alpha, \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie. Il reste à vérifier l'identité Hom-Leibniz

$$\begin{aligned}\{, \}_\alpha \circ (\mu_\alpha \otimes \alpha) &= \alpha \circ \{, \} \circ \alpha^{\otimes 2} \circ (\mu \otimes id) \\ &= \alpha^2 \circ \{, \} \circ (\mu \otimes id),\end{aligned}$$

car A est une algèbre de Poisson

$$\begin{aligned}&= \alpha^2 \circ \mu \circ (id \otimes \{, \} + (\{, \} \otimes id) \circ \tau_{23}) \\ &= \alpha \circ \mu \circ \alpha^{\otimes 2} \circ (id \otimes \{, \} + (\{, \} \otimes id) \circ \tau_{23}) \\ &= \mu_\alpha \circ (\alpha \otimes \{, \}_\alpha + (\{, \}_\alpha \otimes \alpha) \circ \tau_{23}),\end{aligned}$$

ainsi A_α est une algèbre Hom-Poisson. \square

6.1.3 Application à l'algèbre de Sklyanin

Exemple 6.1.5 L'algèbre de Poisson de Sklyanin $q_4(\mathcal{E})$ (voir [ORTP10] pour une définition et des propriétés plus détaillées) est définie sur $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ par un paramètre $k \in \mathbb{C}$ avec la multiplication polynomiale usuelle, et le crochet $\{, \}$, donné sur les fonctions coordonnées par

$$\begin{aligned}\{x_i, x_{i+1}\} &= k^2 x_i x_{i+1} - x_{i+2} x_{i+3}, & i &= 1, 2, 3, 4 \pmod{4}. \\ \{x_i, x_{i+2}\} &= k(x_{i+3}^2 - x_{i+1}^2),\end{aligned}$$

On cherche à nouveau un morphisme $\alpha : q_4(\mathcal{E}) \rightarrow q_4(\mathcal{E})$ sous forme matricielle $\alpha = (\alpha_{ij})$ par rapport à la base (x_0, x_1, x_2, x_3) , en

résolvant les coefficients α_{ij} dans les équations $\alpha([x_i, x_j]) = [\alpha(x_i), \alpha(x_j)]$ prises sur la base. Pour simplifier, on suppose α diagonale, $\alpha_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

On obtient $q_4(\mathcal{E})_\alpha$, des versions Hom-Poisson de $q_4(\mathcal{E})$, avec α donné par

1. $\alpha(x_0) = -\lambda x_0, \alpha(x_1) = i\lambda x_1, \alpha(x_2) = \lambda x_2, \alpha(x_3) = -i\lambda x_3,$
2. $\alpha(x_0) = -\lambda x_0, \alpha(x_1) = -i\lambda x_1, \alpha(x_2) = \lambda x_2, \alpha(x_3) = i\lambda x_3,$
3. $\alpha(x_0) = \lambda x_0, \alpha(x_1) = -\lambda x_1, \alpha(x_2) = \lambda x_2, \alpha(x_3) = -\lambda x_3,$
4. $\alpha = \lambda id,$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par exemple, $q_4(\mathcal{E})$ est munie d'une structure d'algèbre Hom-Poisson, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, avec le crochet suivant

$$\begin{aligned} \{x_i, x_{i+1}\} &= -\lambda^2(k^2 x_i x_{i+1} - x_{i+2} x_{i+3}), \\ \{x_i, x_{i+2}\} &= \lambda^2 k(x_{i+3}^2 - x_{i+1}^2), \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, 3 \pmod{4},$$

et le morphisme α défini par

$$\alpha(x_0) = \lambda x_0, \alpha(x_1) = -\lambda x_1, \alpha(x_2) = \lambda x_2, \alpha(x_3) = -\lambda x_3.$$

6.1.4 Construction d'algèbres Hom-Poisson à partir d'algèbres Hom-Lie

Supposons que $(A, [,], \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie de dimension finie et soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de A . Notons C_{ij}^k les constantes de structure du crochet par rapport à la base, soit $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k$ et α_i^s les coefficients du morphisme α , soit $\alpha(e_i) = \sum_{s=1}^n \alpha_i^s e_s$. L'antisymétrie du crochet et l'identité de Hom-Jacobi peuvent s'écrire avec les constantes de structure sous la forme

$$\begin{aligned} C_{ji}^k &= -C_{ij}^k \quad \text{antisymétrie,} \\ \sum_{1 \leq p, q \leq n} (\alpha_i^p C_{jk}^q + \alpha_j^p C_{ki}^q + \alpha_k^p C_{ij}^q) C_{pq}^s &= 0 \quad \text{identité de Hom-Jacobi.} \end{aligned}$$

Pour construire une algèbre Hom-Poisson à partir d'une algèbre Hom-Lie, il faut définir une multiplication commutative \cdot qui est Hom-associative et un crochet $\{ , \}$ vérifiant l'identité Hom-Leibniz. On peut définir le crochet $\{ , \}$ comme étant égal au crochet $[,]$ sur la base, et l'étendre à tout l'espace par identité Hom-Leibniz.

Notons M_{ij}^k les constantes de structure de la multiplication, soit

$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^n M_{ij}^k e_k$. Par commutativité, $M_{ji}^k = M_{ij}^k$. L'identité Hom-Leibniz s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \{e_i \cdot e_j, \alpha(e_k)\} - \alpha(e_i) \cdot \{e_j, e_k\} - \{e_i, e_k\} \cdot \alpha(e_j) \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{s=1}^n \underbrace{(M_{ij}^p \alpha_k^q C_{pq}^s - (\alpha_i^p C_{jk}^q + C_{ik}^p \alpha_j^q) M_{pq}^s)}_{S_{ijks}} e_s \\ \Leftrightarrow 0 &= S_{ijks}, \end{aligned}$$

ce qui donne un système linéaire en les M_{ij}^l de n^4 équations à n^3 inconnues¹.

La condition de Hom-associativité s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= (e_i \cdot e_j) \cdot \alpha(e_k) - \alpha(e_i) \cdot (e_j \cdot e_k) \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{s=1}^n \underbrace{((M_{ij}^p \alpha_k^q - \alpha_i^p M_{jk}^q) M_{pq}^s)}_{R_{ijks}} e_s \\ \Leftrightarrow 0 &= R_{ijks}, \end{aligned}$$

ce qui donne un système non linéaire en les M_{ij}^l de n^4 équations à n^3 inconnues.

En résolvant premièrement les équations de l'identité Hom-Leibniz, puis en vérifiant si les solutions obtenues satisfont les équations de la Hom-associativité, on obtient des exemples d'algèbres Hom-Poisson.

Exemple 6.1.6 On considère l'algèbre Hom-Lie de dimension 3 avec la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, les crochets donnés par

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= C_{12}^2 e_2 + C_{12}^3 e_3 \\ [e_1, e_3] &= C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 \\ [e_2, e_3] &= 0, \end{aligned}$$

et le morphisme $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Les multiplications donnant une algèbre Hom-Poisson sont de la forme

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= M_{11}^2 e_2 + M_{11}^3 e_3 & e_2 \cdot e_3 &= 0 \\ e_1 \cdot e_2 &= M_{12}^2 e_2 + M_{12}^3 e_3 & e_i \cdot e_i &= 0 \text{ pour } i = 2, 3. \\ e_1 \cdot e_3 &= M_{13}^2 e_2 + M_{13}^3 e_3 \end{aligned}$$

1. en fait seulement $\frac{n^2(n+1)}{2}$ inconnues en utilisant la commutativité

Exemple 6.1.7 D'autres exemples d'algèbres Hom-Poisson de dimension 3 de base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sont donnés par twist de l'algèbre de Poisson suivante :

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \quad \{e_1, e_3\} = ae_2 + be_3,$$

avec toutes les autres multiplications et crochets nuls.

Le morphisme α est calculé pour être multiplicatif pour la multiplication et le crochet. On obtient les morphismes suivants.

Avec $a \neq 0, b \neq 0$

$$\begin{aligned} \alpha(e_1) &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \alpha_{31}e_3 \\ \alpha(e_2) &= \alpha_{11}^2e_2 \\ \alpha(e_3) &= -\frac{a}{b}\alpha_{11}^2e_2 \end{aligned}$$

Avec $a \neq 0, b = 0$

$$\begin{aligned} \alpha(e_1) &= \alpha_{21}e_2 \\ \alpha(e_2) &= 0 \\ \alpha(e_3) &= \alpha_{13}e_1 + \alpha_{23}e_2 + \alpha_{33}e_3 \\ \alpha(e_1) &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \alpha_{31}e_3 \\ \alpha(e_2) &= \alpha_{11}^2e_2 \\ \alpha(e_3) &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{11}^2}{\alpha_{31}}e_1 + \alpha_{23}e_2 + \alpha_{33}e_3 \\ \alpha(e_1) &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 \\ \alpha(e_2) &= \alpha_{11}^2e_2 \\ \alpha(e_3) &= \alpha_{13}e_1 + \alpha_{23}e_2 + \alpha_{11}e_3 \end{aligned}$$

6.2 STRUCTURES À UNE SEULE OPÉRATION BINAIRE

On rappelle ici quelques résultats sur les structures flexible décrites dans [MS08] et on présente leur lien avec les algèbres Hom-Poisson. Les algèbres à une opération ont été introduites par Loday et étudiées par Markl et Remm dans [MR06]. La version twistée a été étudiée dans [Yau10b] où elles sont appelées algèbres de Hom-Poisson admissibles.

6.2.1 Hom-algèbres flexibles

Définition 6.2.1 Une Hom-algèbre $A = (A, \mu, \alpha)$ est dite *flexible* si pour tous $x, y \in A$

$$\mu(\mu(x, y), \alpha(x)) = \mu(\alpha(x), \mu(y, x)). \quad (6.2.1)$$

Remarque 6.2.2 En utilisant le Hom-associateur $\text{as}_{\mu, \alpha}$, la condition (6.2.1) peut s'écrire comme

$$\text{as}_{\mu, \alpha}(x, y, x) = 0.$$

Lemme 6.2.3 Soit $A = (A, \mu, \alpha)$ une Hom-algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (1) A est flexible.
- (2) Pour tous $x, y \in A$, $\text{as}_{\mu, \alpha}(x, y, x) = 0$.

(3) Pour tous $x, y, z \in A$, $\text{as}_{\mu, \alpha}(x, y, z) = -\text{as}_{\mu, \alpha}(z, y, x)$.

Preuve. L'équivalence des deux premiers points provient de la définition. L'égalité $\text{as}_{\mu, \alpha}(x - z, y, x - z) = 0$ est vérifiée par définition et est équivalent à $\text{as}_{\mu, \alpha}(x, y, z) + \text{as}_{\mu, \alpha}(z, y, x) = 0$ par linéarité. \square

Corollaire 6.2.4 *Toute algèbre Hom-associative est flexible.*

Soit $A = (A, \mu, \alpha)$ une Hom-algèbre, où μ est la multiplication et α une application de twist. On définit deux nouvelles multiplications en utilisant μ :

$$\forall x, y \in A \quad x \bullet y = \mu(x, y) + \mu(y, x), \quad \{x, y\} = \mu(x, y) - \mu(y, x).$$

On note $A^+ = (A, \bullet, \alpha)$ et $A^- = (A, \{, \}, \alpha)$.

Proposition 6.2.5 *Une Hom-algèbre $A = (A, \mu, \alpha)$ est flexible si, et seulement si*

$$\{\alpha(x), y \bullet z\} = \{x, y\} \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet \{x, z\}. \quad (6.2.2)$$

Preuve. Soit A une Hom-algèbre flexible. Par le Lemme (6.2.3), c'est équivalent à $\text{as}_{\mu, \alpha}(x, y, z) + \text{as}_{\mu, \alpha}(z, y, x) = 0$ pour tous $x, y, z \in A$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} & \text{as}_{\mu, \alpha}(x, y, z) + \text{as}_{\mu, \alpha}(z, y, x) + \text{as}_{\mu, \alpha}(x, z, y) + \\ & \text{as}_{\mu, \alpha}(y, z, x) - \text{as}_{\mu, \alpha}(y, x, z) - \text{as}_{\mu, \alpha}(z, x, y) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

En développant, la relation précédente est équivalente à $\{\alpha(x), y \bullet z\} = \{x, y\} \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet \{x, z\}$. Réciproquement, supposons que la condition (6.2.2) est vérifiée. En prenant $x = z$ dans (6.2.3), on obtient $\text{as}_{\mu, \alpha}(x, y, x) = 0$. Ainsi, A est flexible. \square

6.2.2 Lien avec les algèbres Hom-Poisson

Définition 6.2.6 *Une algèbre Hom-Poisson à une opération est une Hom-algèbre (A, \cdot, α) vérifiant pour tous $x, y, z \in A$,*

$$3\text{as}_{\cdot, \alpha}(x, y, z) = (x \cdot z) \cdot \alpha(y) + (y \cdot z) \cdot \alpha(x) - (y \cdot x) \cdot \alpha(z) - (z \cdot x) \cdot \alpha(y). \quad (6.2.4)$$

Si α est l'application identité, A est une algèbre de Poisson à une opération.

On considère une Hom-algèbre (A, \cdot, α) . On définit les deux opérations $\bullet : A \otimes A \rightarrow A$ et $\{, \} : A \otimes A \rightarrow A$ par

$$\forall x, y \in A, \quad x \bullet y = x \cdot y + y \cdot x, \quad \{x, y\} = x \cdot y - y \cdot x. \quad (6.2.5)$$

Théorème 6.2.7 *$(A, \bullet, \{, \}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Poisson si, et seulement si (A, \cdot, α) est une algèbre Hom-Poisson à une opération.*

Preuve. Supposons que $(A, \bullet, \{, \}, \alpha)$ soit une algèbre Hom-Poisson. Puisque

$$\forall x, y \in A, x \cdot y = \frac{1}{2}(\{x, y\} + x \bullet y),$$

on a, en développant,

$$\text{as}_{\cdot, \alpha}(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot \alpha(z) - \alpha(x) \cdot (y \cdot z) = \frac{1}{4}\{\alpha(y), \{z, x\}\},$$

et, d'un autre côté, en utilisant que la multiplication \bullet est Hom-associative et commutative, et que $\{, \}$ est un crochet Hom-Lie,

$$(x \cdot z) \cdot \alpha(y) + (y \cdot z) \cdot \alpha(x) - (y \cdot x) \cdot \alpha(z) - (z \cdot x) \cdot \alpha(y) = \frac{3}{4}\{\alpha(y), \{z, x\}\}.$$

On a donc l'équation (6.2.4).

Supposons maintenant que l'équation (6.2.4) est vérifiée. On doit montrer que \bullet est Hom-associative et que $\{, \}$ est un crochet Hom-Lie.

En utilisant la relation (6.2.4), on obtient les identités

$$\forall x, y, z \in A \quad \text{as}_{\cdot, \alpha}(x, y, z) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(y, z, x) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(z, x, y) = 0 \quad (6.2.6)$$

$$\forall x, y, z \in A \quad \text{as}_{\cdot, \alpha}(x, y, z) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(z, y, x) = 0. \quad (6.2.7)$$

Cette dernière identité (6.2.7) montre que (A, \cdot, α) est une algèbre Hom-flexible en utilisant le Lemme 6.2.3.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \text{as}_{\bullet, \alpha}(x, y, z) &= (x \bullet y) \bullet \alpha(z) - \alpha(x) \bullet (y \bullet z) \\ &= \text{as}_{\cdot, \alpha}(y, z, x) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(x, z, y) - (\text{as}_{\cdot, \alpha}(z, y, x) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(x, y, z)) \\ &\stackrel{(6.2.7)}{=} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le produit \bullet est Hom-associatif et commutatif par définition. De plus,

$$\begin{aligned} J_{\{, \}, \alpha}(x, y, z) &= \{\alpha(x), \{y, z\}\} + \{\alpha(y), \{z, x\}\} + \{\alpha(z), \{x, y\}\} \\ &= -(\text{as}_{\cdot, \alpha}(x, y, z) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(y, z, x) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(z, x, y)) + \\ &\quad \text{as}_{\cdot, \alpha}(x, z, y) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(y, x, z) + \text{as}_{\cdot, \alpha}(z, y, x) \\ &\stackrel{(6.2.6)}{=} 0, \end{aligned}$$

donc $\{, \}$ est un crochet Hom-Lie. Puisque A est flexible, la Proposition 6.2.5 assure la compatibilité entre \bullet et $\{, \}$,

$$\{\alpha(x), y \bullet z\} = \{x, y\} \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet \{x, z\}.$$

Finalement, $(A, \bullet, \{, \}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Poisson. \square

Proposition 6.2.8 Soit (A, \cdot) une algèbre de Poisson à une opération, et $\alpha : A \rightarrow A$ une application linéaire multiplicative pour la multiplication \cdot , i.e. $\alpha \circ \cdot = \cdot \circ \alpha^{\otimes 2}$, alors $A_\alpha = (A, \cdot_\alpha = \alpha \circ \cdot, \alpha)$ est une algèbre Hom-Poisson à une opération.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} 3a5._{\alpha, \alpha}(x, y, z) &= (x \cdot_\alpha y) \cdot_\alpha \alpha(z) - \alpha(x) \cdot_\alpha (y \cdot_\alpha z) \\ &= \alpha(\alpha(x \cdot y) \cdot \alpha(z)) - \alpha(\alpha(x) \cdot \alpha(y \cdot z)) = \alpha^2((x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)), \end{aligned}$$

et puisque \cdot vérifie l'équation à une opération,

$$\begin{aligned} 3a5._{\alpha, \alpha}(x, y, z) &= \alpha^2((x \cdot z) \cdot y + (y \cdot z) \cdot x - (y \cdot x) \cdot z - (z \cdot x) \cdot y) \\ &= \alpha(\alpha(x \cdot z) \cdot \alpha(y)) + \alpha(\alpha(y \cdot z) \cdot \alpha(x)) \\ &\quad - \alpha(\alpha(y \cdot x) \cdot \alpha(z)) - \alpha(\alpha(z \cdot x) \cdot \alpha(y)) \\ &= (x \cdot_\alpha z) \cdot_\alpha (y) + (y \cdot_\alpha z) \cdot_\alpha (x) - (y \cdot_\alpha x) \cdot_\alpha (z) - (z \cdot_\alpha x) \cdot_\alpha (y). \end{aligned}$$

□

6.3 ALGÈBRES HOM-COPOISSON ET DUALITÉ

Dans cette section, on étend le lien entre les bigèbres de Lie et les algèbres coPoisson-Hopf présenté dans [CP94] au cas Hom. On étend de même le résultat établi dans [OP11], affirmant que le dual fini d'une algèbre coPoisson Hopf est une algèbre Poisson-Hopf.

6.3.1 Lien avec les bigèbres Hom-Lie

Définition 6.3.1 Une algèbre Hom-coPoisson est composée d'une cogèbre cocommutative Hom-coassociative $(A, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ munie d'une application linéaire antisymétrique $\delta : A \rightarrow A \otimes A$, le cocrochet Hom-coPoisson, vérifiant les conditions suivantes.

(i) (identité Hom-coJacobi)

$$(id + \sigma + \sigma^2) \circ (\alpha \otimes \delta) \circ \delta = 0, \quad (6.3.1)$$

(ii) (identité Hom-coLeibniz)

$$(\Delta \otimes \alpha) \circ \delta = (\alpha \otimes \delta) \circ \Delta + \tau_{23} \circ (\delta \otimes \alpha) \circ \Delta. \quad (6.3.2)$$

Cette algèbre Hom-coPoisson est notée par un uplet $(A, \Delta, \varepsilon, \alpha, \delta)$.

Proposition 6.3.2 Soit $(A, \Delta, \varepsilon, \alpha, \delta)$ un algèbre Hom-coPoisson et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme d'algèbre Hom-coPoisson. Alors $(A, \Delta_\beta = \Delta \circ \beta, \varepsilon, \alpha \circ \beta, \delta_\beta = \delta \circ \beta)$ est une algèbre Hom-coPoisson.

Preuve. Le Théorème 5.2.2 assure que $(A, \Delta_\beta, \varepsilon, \alpha \circ \beta)$ est une co-gèbre Hom-coassociative et le Théorème 5.3.3 que $(A, \delta_\beta, \alpha \circ \beta)$ est une cogèbre Hom-Lie. Il reste à montrer la condition de compatibilité (6.3.2). Le membre gauche s'écrit

$$(\Delta_\beta \otimes \alpha \circ \beta) \circ \delta_\beta = (\Delta \circ \beta \otimes \alpha \circ \beta) \circ \delta \circ \beta = (\Delta \otimes \alpha) \circ \beta^2,$$

et le membre droit se met sous la forme

$$\begin{aligned} & (\alpha \circ \beta \otimes \delta_\beta) \circ \Delta_\beta + \tau_{23} \circ (\delta_\beta \otimes \alpha \circ \beta) \circ \Delta_\beta \\ &= (\alpha \circ \beta \otimes \delta \circ \beta) \circ \Delta \circ \beta + \tau_{23} \circ (\delta \circ \beta \otimes \alpha \circ \beta) \circ \Delta \circ \beta \\ &= [(\alpha \otimes \delta) \circ \Delta + \tau_{23} \circ (\delta \otimes \alpha) \circ \Delta] \circ \beta^2, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. \square

On obtient les deux Corollaires suivants. D'une algèbre de co-Poisson, on peut construire une algèbre Hom-coPoisson avec des morphismes d'algèbres de coPoisson. D'un autre côté, une algèbre Hom-coPoisson permet d'en construire une infinité d'autres.

Corollaire 6.3.3

1. Soit $(A, \Delta, \varepsilon, \delta)$ une algèbre coPoisson et $\beta : A \rightarrow A$ un morphisme d'algèbre coPoisson. Alors $(A, \Delta_\beta = \Delta \circ \beta, \varepsilon, \beta, \delta_\beta = \delta \circ \beta)$ est une algèbre Hom-coPoisson.
2. Soit $(A, \Delta, \varepsilon, \alpha, \delta)$ une algèbre Hom-coPoisson. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, \Delta \circ \alpha^n, \varepsilon, \alpha^{n+1}, \delta \circ \alpha^n)$ est une algèbre Hom-coPoisson.

Définition 6.3.4 Une bigèbre Hom-coPoisson $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha, \delta)$ est une algèbre Hom-coPoisson $(A, \Delta, \varepsilon, \alpha, \delta)$ qui est aussi une Hom-bigèbre $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$, les deux structures étant compatible dans le sens que δ est une dérivation le long de Δ ,

$$\delta \circ \mu = \mu^{[2]} \circ (\delta \otimes \Delta + \Delta \otimes \delta).$$

Une algèbre Hom-coPoisson Hopf $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \alpha, \delta)$ est une bigèbre Hom-coPoisson $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha, \delta)$ avec une antipode S , telle que l'uplet $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \alpha)$ est une algèbre Hom-Hopf.

Théorème 6.3.5 Soit $(\mathfrak{g}, [,], \alpha)$ une algèbre Hom-Lie. Si son algèbre enveloppante universelle $U_{HLie}(\mathfrak{g})$ possède une structure Hom-coPoisson δ telle que $\delta \circ \alpha = \alpha^{\otimes 2} \circ \delta$, en faisant une bigèbre Hom-coPoisson, alors $\delta(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, et $\delta|_{\mathfrak{g}}$ munit $(\mathfrak{g}, [,], \alpha, \delta|_{\mathfrak{g}}, id)$ d'une structure de bigèbre Hom-Lie. Réciproquement, pour une bigèbre Hom-Lie $(\mathfrak{g}, [,], \delta, \alpha)$, le crochet

$\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ s'étend de manière unique en un cocrochet Hom-coPoisson sur $U_{HLie}(\mathfrak{g})$, ce qui équipe $U_{HLie}(\mathfrak{g})$ d'une structure de bigèbre Hom-coPoisson.

Preuve. Soit $\delta : U_{HLie}(\mathfrak{g}) \rightarrow U_{HLie}(\mathfrak{g}) \otimes U_{HLie}(\mathfrak{g})$ un cocrochet Hom-coPoisson sur $U_{HLie}(\mathfrak{g})$. Pour montrer que $\delta(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, soit $x \in \mathfrak{g}$, écrivons $\delta(x) = \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)}$ où $x^{(1)}, x^{(2)} \in U_{HLie}(\mathfrak{g})$. On peut supposer que les $x^{(2)}$ sont linéairement indépendants. Par la condition Hom-coLeibniz (6.3.2), on a

$$\begin{aligned} \sum_{(x)} \Delta(x^{(1)}) \otimes \alpha(x^{(2)}) &= \alpha(\mathbf{1}) \otimes \delta(\alpha(x)) + \alpha(\alpha(x)) \otimes \delta(\mathbf{1}) \\ &\quad + \tau_{23} \circ (\delta(\mathbf{1}) \otimes \alpha(\alpha(x)) + \delta(\alpha(x)) \otimes \alpha(\mathbf{1})) \end{aligned}$$

car $x \in \mathfrak{g}$ et $\Delta(x) = \mathbf{1} \otimes \alpha(x) + \alpha(x) \otimes \mathbf{1}$. De plus, $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et δ est une dérivation le long de Δ donc $\delta(\mathbf{1}) = 0$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{(x)} \Delta(x^{(1)}) \otimes \alpha(x^{(2)}) &= \mathbf{1} \otimes \delta(\alpha(x)) + \tau_{23} \circ (\delta(\alpha(x)) \otimes \mathbf{1}) \\ &= \sum_{(x)} \left(\mathbf{1} \otimes \alpha(x^{(1)}) + \alpha(x^{(1)}) \otimes \mathbf{1} \right) \otimes \alpha(x^{(2)}) \end{aligned}$$

en utilisant la multiplicativité $\delta \circ \alpha = \alpha^{\otimes 2} \circ \delta$. Il s'ensuit que $x^{(1)}$ sont des éléments Hom-primitifs ($\Delta(x) = \mathbf{1} \otimes \alpha(x) + \alpha(x) \otimes \mathbf{1}$) de $U_{HLie}(\mathfrak{g})$, donc $\delta(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes U_{HLie}(\mathfrak{g})$. Puisque δ est antisymétrique,

$$\delta(\mathfrak{g}) \subset (\mathfrak{g} \otimes U_{HLie}(\mathfrak{g})) \cap (U_{HLie}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}.$$

Pour montrer la condition de compatibilité (5.3.4) pour $\delta|_{\mathfrak{g}}$ et les applications de twist α et id , soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et calculons

$$\begin{aligned} \delta([x, y]) &= \delta(xy - yx) \\ &= \delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y) - \delta(y)\Delta(x) - \Delta(y)\delta(x) \\ &= [\Delta(x), \delta(y)] - [\Delta(y), \delta(x)] \\ &= [\alpha(x), y^{(1)}] \otimes y^{(2)} + y^{(1)} \otimes [\alpha(x), y^{(2)}] \\ &\quad - [\alpha(y), x^{(1)}] \otimes x^{(2)} - x^{(1)} \otimes [\alpha(y), x^{(2)}] \\ &= ad_{\alpha(x)}(\Delta(y)) - ad_{\alpha(y)}(\Delta(x)). \end{aligned}$$

Réciproquement, $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ s'étend uniquement en $\bar{\delta} : U_{HLie}(\mathfrak{g}) \rightarrow U_{HLie}(\mathfrak{g}) \otimes U_{HLie}(\mathfrak{g})$ tel que $\bar{\delta}|_{\mathfrak{g}} = \delta$, avec la formule

$$\bar{\delta}(xy) = \bar{\delta}(x)\Delta(y) + \Delta(x)\bar{\delta}(y).$$

Ceci munit $U_{HLie}(\mathfrak{g})$ d'une structure de bigèbre Hom-coPoisson. \square

6.3.2 Dualité

Définition 6.3.6 Une algèbre A sur \mathbb{K} est une extension presque normalisante sur \mathbb{K} si A est une \mathbb{K} -algèbre finiment engendrée par des générateurs x_1, \dots, x_n vérifiant la condition

$$x_i x_j - x_j x_i \in \sum_{l=1}^n \mathbb{K} x_l + \mathbb{K} \quad (6.3.3)$$

pour tous i, j .

Lemme 6.3.7 Soit A une extension presque normalisante de \mathbb{K} avec des générateurs x_1, \dots, x_n . Alors A est engendrée par les monômes usuels

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}, \quad r_i \in \mathbb{N}$$

avec l'unité 1.

Preuve. Ceci découle d'un raisonnement par récurrence sur le degré des monômes. \square

On rappelle que le dual fini A° d'une Hom-bigèbre A est

$$A^\circ = \{f \in A^*, f(I) = 0 \text{ pour un idéal cofini } I \text{ of } A\},$$

où A^* est l'espace vectoriel dual de A .

Théorème 6.3.8 Soit A une bigèbre Hom-coPoisson avec un cocrochet de Poisson δ et une application de twist α multiplicative. Si A est une extension presque normalisante sur \mathbb{K} , alors le dual fini A° est une bigèbre Hom-Poisson avec pour application de twist α° et crochet

$$\{f, g\}(x) = \langle \delta(x), f \otimes g \rangle, \quad x \in A \quad (6.3.4)$$

pour tous $f, g \in A^\circ$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre l'espace vectoriel $A \otimes A$ et son dual.

Preuve. La preuve est presque identique à celle de [OP11]. On ne reprend pas ici la première étape montrant que le crochet (6.3.4) est bien défini, cela utilise le fait que A est une extension presque normalisante sur \mathbb{K} .

L'antisymétrie provient de $\tau_{12} \circ \delta = -\delta$, on a

$$\begin{aligned} \{g, f\}(x) &= \langle \delta(x), g \otimes f \rangle = \langle \tau_{12} \circ \delta, f \otimes g \rangle \\ &= -\langle \delta(x), f \otimes g \rangle = -\{f, g\}(x), \end{aligned}$$

pour tout $x \in A$.

L'équation (6.3.4) vérifie l'identité Hom-Leibniz : comme

$$\{f g, \alpha^\circ(h)\}(x) = \langle (\Delta \otimes \alpha) \circ \delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle$$

et

$$\begin{aligned} & (\alpha^\circ(f)\{g, h\} + \{f, h\}\alpha^\circ(g))(x) \\ & = \langle (\alpha \otimes \delta) \circ \Delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle + \langle \tau_{23} \circ (\delta \otimes \alpha) \circ \Delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle \end{aligned}$$

pour $x \in A$ et $f, g, h \in A^\circ$, il est suffisant de montrer que

$$(\Delta \otimes \alpha) \circ \delta = (\alpha \otimes \delta) \circ \Delta + \tau_{23} \circ (\delta \otimes \alpha) \circ \Delta,$$

mais c'est justement l'identité Hom-coLeibniz pour δ .

L'équation (6.3.4) vérifie l'identité Hom-Jacobi : on a

$$\begin{aligned} \{\alpha^\circ(f), \{g, h\}\}(x) &= \langle (\alpha \otimes \delta) \circ \delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle, \\ \{\alpha^\circ(g), \{h, f\}\}(x) &= \langle \sigma \circ (\alpha \otimes \delta) \circ \delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle, \\ \{\alpha^\circ(h), \{f, g\}\}(x) &= \langle \sigma^2 \circ (\alpha \otimes \delta) \circ \delta(x), f \otimes g \otimes h \rangle, \end{aligned}$$

pour $x \in A$ et $f, g, h \in A^\circ$. Ainsi (6.3.4) vérifie l'identité Hom-Jacobi si, et seulement si δ vérifie

$$(id + \sigma + \sigma^2) \circ (\alpha \otimes \delta) \circ \delta = 0,$$

qui est l'identité Hom-coJacobi de δ .

Le crochet défini par (6.3.4) vérifie la condition de compatibilité avec la comultiplication de la Hom-bigèbre, c'est une μ -codérivation : puisque δ est une Δ -dérivation, on a pour $f, g \in A^\circ$

$$\begin{aligned} \Delta(\{f, g\})(x \otimes y) &= \{f, g\}(xy) = \langle \delta(xy), f \otimes g \rangle \\ &= \langle \delta(x)\Delta(y), f \otimes g \rangle + \langle \Delta(x)\delta(y), f \otimes g \rangle \\ &= \langle \delta(x), f_1 \otimes g_1 \rangle \langle \Delta(y), f_2 \otimes g_2 \rangle \\ &\quad + \langle \Delta(x), f_1 \otimes g_2 \rangle \langle \delta(y), f_2 \otimes g_2 \rangle \\ &= \{f_1, g_1\}(x)(f_2 g_2)(y) + (f_1 g_1)(x)\{f_2, g_2\}(y) \\ &= \{\Delta(f), \Delta(g)\}(x \otimes y). \end{aligned}$$

Finalement, le crochet défini par (6.3.4) munit A° d'une structure de bigèbre Hom-Poisson, l'application de twist étant α° . \square

Soit $(\mathfrak{g}, [,], \delta, \alpha)$ une bigèbre Hom-Lie, $U_{HLie}(\mathfrak{g})$ la Hom-bigèbre enveloppante universelle de \mathfrak{g} avec comultiplication Δ . Le cocrochet $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ s'étend de manière unique en une Δ -dérivation $\bar{\delta} : U_{HLie}(\mathfrak{g}) \rightarrow U_{HLie}(\mathfrak{g}) \otimes U_{HLie}(\mathfrak{g})$ telle que $\bar{\delta}|_{\mathfrak{g}} = \delta$ et $\bar{\delta}(xy) = \bar{\delta}(x)\Delta(y) + \Delta(x)\bar{\delta}(y)$. Alors $U_{HLie}(\mathfrak{g})$ est une bigèbre Hom-coPoisson avec cocrochet $\bar{\delta}$.

Corollaire 6.3.9 *Soit $(\mathfrak{g}, [,], \delta, \alpha)$ une bigèbre Hom-Lie de dimension finie. Alors le dual $U_{HLie}(\mathfrak{g})^\circ$ de la Hom-bigèbre universelle enveloppante $U_{HLie}(\mathfrak{g})$ est une bigèbre Hom-Poisson avec comme crochet de Poisson*

$$\{f, g\}(x) = \langle \bar{\delta}(x), f \otimes g \rangle, \quad x \in U_{HLie}(\mathfrak{g})$$

pour $f, g \in U_{HLie}(\mathfrak{g})^\circ$.

Preuve. Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ une base de \mathfrak{g} . Alors $U_{HLie}(\mathfrak{g})$ est une extension presque normalisante sur \mathbb{K} avec pour générateurs x_1, \dots, x_n . Ainsi, le résultat provient du Théorème 6.3.8. \square

DÉFORMATION ET QUANTIFICATION DE HOM-ALGÈBRES

SOMMAIRE

7.1	HOM-DÉFORMATION FORMELLE	114
7.1.1	Déformation formelle d'algèbres Hom-associatives	114
7.1.2	Déformations de Hom-cogèbres et Hom-bigèbres	116
7.2	QUANTIFICATION ET TWISTS DE \star -PRODUITS	116
7.2.1	Twists du \star -produit de Moyal-Weyl	118
7.2.2	Twists du crochet de Poisson	120
7.2.3	Quantification des automorphismes de Poisson .	122

LA théorie de déformation formelle s'étend naturellement aux structures Hom-algébriques [MS10b, AEM11, DM]. On rappelle cette théorie pour les algèbres Hom-associatives, les cogèbres Hom-coassociatives et les Hom-bigèbres. On cherche ensuite les morphismes de Poisson et du \star -produit de Moyal-Weyl, permettant d'obtenir des algèbres Hom-Poisson et Hom-associatives par twist.

7.1 HOM-DÉFORMATION FORMELLE

Soit A un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles en une variable t à coefficients dans \mathbb{K} et $A[[t]]$ l'ensemble des séries formelles dont les coefficients sont des éléments de A , ($A[[t]]$ est obtenu par extension des scalaires de A de \mathbb{K} à $\mathbb{K}[[t]]$). Alors $A[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]$ -module. Si A est de dimension finie, on a $A[[t]] = A \otimes \mathbb{K}[[t]]$. Il est à noter que A est un sous-module de $A[[t]]$. On définit les déformations formelles pour les algèbres Hom-associatives, cogèbres Hom-coassociatives et Hom-bigèbres.

7.1.1 Déformation formelle d'algèbres Hom-associatives

Définition 7.1.1 Soit $A = (A, \mu_0, \alpha_0)$ une algèbre Hom-associative. Une déformation formelle Hom-associative de A est donnée par une application $\mathbb{K}[[t]]$ -bilinéaire $\mu_t : A[[t]] \otimes A[[t]] \rightarrow A[[t]]$ et une application $\mathbb{K}[[t]]$ -linéaire $\alpha_t : A[[t]] \rightarrow A[[t]]$ de la forme

$$\mu_t = \sum_{i \geq 0} \mu_i t^i \quad \text{et} \quad \alpha_t = \sum_{i \geq 0} \alpha_i t^i \quad (7.1.1)$$

où chaque μ_i est une application \mathbb{K} -bilinéaire $\mu_i : A \otimes A \rightarrow A$ (étendue pour être $\mathbb{K}[[t]]$ -bilinéaire) et chaque α_i est une application \mathbb{K} -linéaire (étendue pour être $\mathbb{K}[[t]]$ -linéaire) telles qu'on ait la condition de Hom-associativité formelle suivante :

$$\text{as}_{\mu_t, \alpha_t} = \mu_t \circ (\mu_t \otimes \alpha_t - \alpha_t \otimes \mu_t) = 0. \quad (7.1.2)$$

Si $\alpha_t = id$, on retrouve la définition de déformation formelle d'une algèbre associative déjà présentée en Section 1.2.4.

Exemple 7.1.2 On peut regarder l'algèbre Hom-Lie $\mathfrak{sl}(2)$ de Jackson de l'Exemple 5.1.4 comme une déformation formelle de $\mathfrak{sl}(2)$. En posant $q = 1 + t$, les crochets et l'application de twist sont donnés par

$$\begin{aligned} [h, e]_t &= 2e, & \alpha_t(e) &= e + et, \\ [h, f]_t &= -2f - 2ft, & \alpha_t(f) &= f + 2ft + ft^2, \\ [e, f]_t &= h + \frac{h}{2}t, & \alpha_t(h) &= h + ht, \end{aligned}$$

Les coefficients des puissances de t sont les suivants.

$$\begin{aligned} [h, e]_0 &= 2e, & [h, f]_0 &= -2f, & [e, f]_0 &= h, \\ \alpha_0(e) &= e & \alpha_0(f) &= f & \alpha_0(h) &= h \\ [h, e]_1 &= 0, & [h, f]_1 &= -2f, & [e, f]_1 &= \frac{h}{2}, \\ \alpha_1(e) &= e & \alpha_1(f) &= 2f & \alpha_1(h) &= h \\ & & \alpha_2(f) &= f & & \end{aligned}$$

On retrouve le crochet de $\mathfrak{sl}(2)$ classique à l'ordre 0 et $\alpha_0 = id$. Il existe d'autres morphismes de twist possibles (donnés dans l'Exemple 5.1.11) pour le même crochet $[,]_t$, par exemple

$$\alpha_t(e) = e, \quad \alpha_t(f) = \frac{2+t}{2(1+t)}f = f + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f}{2} t^k, \quad \alpha_t(h) = h + \frac{h}{2}t.$$

L'équation (7.1.2) peut s'écrire

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu_i(\alpha_k(x), \mu_j(y, z)) - \mu_i(\mu_j(x, y, \alpha_k(z)))) t^{i+j+k} = 0. \quad (7.1.3)$$

En introduisant les α -associateurs

$$(x, y, z) \mapsto \mu_i \circ_{\alpha} \mu_j(x, y, z) := \mu_i(\alpha(x), \mu_j(y, z)) - \mu_i(\mu_j(x, y, \alpha(z))),$$

l'équation de déformation peut s'écrire comme suit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu_i \circ_{\alpha_k} \mu_j) t^{i+j+k} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{s \in \mathbb{N}} t^s \sum_{k=0}^s \sum_{i=0}^{s-k} \mu_i \circ_{\alpha_k} \mu_{s-k-i} = 0.$$

Ceci est équivalent au système infini

$$\sum_{k=0}^s \sum_{i=0}^{s-k} \mu_i \circ_{\alpha_k} \mu_{s-k-i} = 0, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (7.1.4)$$

La cohomologie de type Hochschild à valeurs dans A d'algèbres Hom-associatives initiée dans [MS10b] et étendue dans [AEM11] convient et conduit aux interprétations cohomologiques suivantes :

1. Il y a une bijection naturelle entre $H^2(A, A)$ et les classes d'équivalences des déformations (mod t^2) de A .
2. Si $H^2(A, A) = 0$, alors toute déformation de A est triviale.

Le fait que l'antisymétrisation du premier élément de la déformation d'une algèbre associative définit un crochet de Poisson est encore vrai dans le cadre Hom. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 7.1.3 ([MS10b, Theorem 4.9]) *Soit $A = (A, \mu_0, \alpha_0)$ une algèbre Hom-associative commutative et $A_t = (A, \mu_t, \alpha_t)$ une déformation de A . On considère le crochet défini pour $x, y \in A$ par $\{x, y\} = \mu_1(x, y) - \mu_1(y, x)$ où μ_1 est le premier élément de la déformation μ_t . Alors $(A, \mu_0, \{ , \}, \alpha_0)$ est une algèbre Hom-Poisson.*

La preuve est principalement calculatoire, elle repose sur les propriétés des α -associateurs, et s'obtient en ré-écrivant les équations de déformation (7.1.4) en terme d'opérateurs de bords.

7.1.2 Déformations de Hom-cogèbres et Hom-bigèbres

Définition 7.1.4 Soit (A, Δ_0, α_0) une Hom-cogèbre coassociative. Une déformation formelle Hom-coassociative de A est donnée par des applications linéaires $\Delta_t : A[[t]] \rightarrow A[[t]] \otimes A[[t]]$ et $\alpha_t : A[[t]] \rightarrow A[[t]]$ telles que $\Delta_t = \sum_{i \geq 0} \Delta_i t^i$ et $\alpha_t = \sum_{i \geq 0} \alpha_i t^i$ où les Δ_i, α_i sont des applications linéaires $\Delta_i : A \rightarrow A \otimes A$ et $\alpha_i : A \rightarrow A$ (étendues pour être $\mathbb{K}[[t]]$ -linéaires) telle qu'on ait la condition de Hom-coassociativité formelle suivante :

$$(\Delta_t \otimes \alpha_t - \alpha_t \otimes \Delta_t) \circ \Delta_t = 0. \tag{7.1.5}$$

Définition 7.1.5 Soit $(A, \mu_0, \Delta_0, \alpha_0)$ une Hom-bigèbre. Une déformation formelle de Hom-bigèbre de A est donnée par des applications linéaires $\mu_t : A[[t]] \otimes A[[t]] \rightarrow A[[t]]$, $\Delta_t : A[[t]] \rightarrow A[[t]] \otimes A[[t]]$ et $\alpha_t : A[[t]] \rightarrow A[[t]]$ telles que

1. $(A[[t]], \mu_t, \alpha_t)$ est une algèbre Hom-associative,
2. $(A[[t]], \Delta_t, \alpha_t)$ est une cogèbre Hom-coassociative,
3. la multiplication et la comultiplication sont compatibles, c'est-à-dire que

$$\Delta_t \circ \mu_t = (\mu_t \otimes \mu_t) \circ \tau_{23} \circ (\Delta_t \otimes \Delta_t).$$

Dans [DM], il est montré que les déformations sont contrôlées par une cohomologie de type Hochschild et que chaque déformation d'une algèbre Hom-associative unitaire (resp. cogèbre Hom-coassociative counitaire) est équivalente à une algèbre Hom-associative unitaire (resp. cogèbre Hom-coassociative counitaire). De plus, tout déformation d'une algèbre Hom-Hopf en tant que Hom-bigèbre est automatiquement une algèbre Hom-Hopf.

De manière similaire que pour les algèbres Hom-associatives, on a le résultat suivant.

Théorème 7.1.6 Soit $A = (A, \Delta_0, \alpha_0)$ une cogèbre cocommutative Hom-coassociative et $A_t = (A, \Delta_t, \alpha_t)$ déformation de A . On considère le cocrochet défini pour $x \in A$ par $\delta(x) = \Delta_1(x) - \Delta_1^{op}(x)$ où Δ_1 est le premier élément de la déformation Δ_t . Alors $(A, \Delta_0, \delta, \alpha_0)$ est une algèbre Hom-coPoisson.

7.2 QUANTIFICATION ET TWISTS DE ★-PRODUITS

On pose le problème de quantification par déformation pour les algèbres Hom-associatives.

Soit $(A, \cdot, \{, \}, \alpha)$ une algèbre commutative Hom-associative munie d'un crochet Hom-Poisson $\{, \}$.

Définition 7.2.1 Un \star -produit sur A est une déformation formelle à un paramètre défini sur A par

$$f \star_t g = \sum_{r=0}^{\infty} t^r \mu_r(f, g)$$

tel que

1. le \star -produit de $A[[t]]$ est Hom-associatif, c'est-à-dire

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^r (\mu_i(\mu_{r-i}(f, g), \alpha(h)) - (\mu_i(\alpha(f), \mu_{r-i}(g, h))) = 0,$$

2. $\mu_0(f, g) = f \cdot g$,

3. $\mu_1(f, g) - \mu_1(g, f) = \{f, g\}$,

4. $\mu_r(f, 1) = \mu_r(1, f) = 0 \quad \forall r > 0$.

Remarque 7.2.2

- La condition 2. montre que $[f, g] := \frac{1}{t}(f \star_t g - g \star_t f)$ est une déformation de la structure Hom-Lie $\{, \}$.
- La condition $\mu_1(f, g) - \mu_1(g, f) = \{f, g\}$ exprime la correspondance entre la déformation et la structure Hom-Poisson

$$\frac{f \star_t g - g \star_t f}{t} \Big|_{t=0} = \{f, g\}.$$

De manière similaire, on pose la version duale du problème de quantification comme suit.

Soit A une bigèbre (resp. algèbre de Hopf) cocommutative Hom-coPoisson et soit δ son cocrochet de Poisson. Une quantification de A est une déformation A_t de A en tant que Hom-bigèbre (resp. algèbre Hom-Hopf) telle que

$$\delta(x) = \frac{\Delta_t(a) - \Delta_t^{op}(a)}{t} \pmod{t},$$

où $x \in A$ et a est un élément de $A[[t]]$ vérifiant $x = a \pmod{t}$.

Théorème 7.2.3 Soit (A, \star) une déformation associative d'une algèbre associative (A, μ_0) , avec $\star = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i t^i$. Soit $\alpha : A \rightarrow A$ un morphisme tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha \circ \mu_i = \mu_i \circ \alpha^{\otimes 2}$. Alors $(A, \star_\alpha = \alpha \circ \star, \alpha)$ est une déformation Hom-associative de $(A, \mu_{0, \alpha}, \alpha)$.

Preuve. Comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha \circ \mu_i = \mu_i \circ \alpha^{\otimes 2}$, on a aussi $\alpha \circ \star = \star \circ \alpha^{\otimes 2}$. Ainsi, α est un morphisme d'algèbre de (A, \star) , qui munit donc $(A, \star_\alpha, \alpha)$ d'une structure Hom-associative d'après le principe de twist Théorème 5.1.5. Le premier terme de cette déformation Hom-associative est bien $\mu_{0, \alpha}$ qui est aussi Hom-associative. \square

7.2.1 Twists du \star -produit de Moyal-Weyl

Dans ce qui suit, on effectue un twist du produit de Moyal-Weyl. C'est le \star -produit associatif correspondant à la déformation du crochet de Poisson de l'espace des phases, l'un des premiers exemples de la déformation formelle de Kontsevich [Kon03].

On considère l'algèbre de Poisson des polynômes de deux variables $R = (\mathbb{R}[x, y], \cdot, \{, \})$ où le crochet de Poisson de deux polynômes est donné par $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$.

L'algèbre associative associée est $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star_{MW})$, où le \star -produit est donné par la formule de Moyal-Weyl

$$\star_{MW} = \mu_0 \circ e^{\frac{\lambda}{2}(\partial_x \otimes \partial_y - \partial_y \otimes \partial_x)} \quad (7.2.1)$$

ce qui, en développant les exponentielles, s'écrit pour $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ sous la forme

$$f \star_{MW} g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (\partial_x^k \partial_y^{n-k} f)(\partial_x^{n-k} \partial_y^k g), \quad (7.2.2)$$

en notant λ le paramètre formel.

Ce \star -produit est équivalent au \star -produit qui s'écrit sous la forme plus simple $\star = \mu_0 \circ e^{\lambda \partial_x \otimes \partial_y}$, sur des éléments on obtient

$$f \star g = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{\partial^n g}{\partial y^n} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(f, g) \lambda^n, \quad (7.2.3)$$

où $\mu_n(f, g) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{\partial^n g}{\partial y^n}$.

L'isomorphisme entre les algèbres associatives $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star_{MW})$ et $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star)$ est donné par

$$S = e^{-\frac{\lambda}{2} \partial_x \partial_y} \quad S \circ \star = \star_{MW} \circ (S \otimes S).$$

Proposition 7.2.4 *Tout morphisme $\alpha : \mathbb{R}[x, y][[\lambda]] \rightarrow \mathbb{R}[x, y][[\lambda]]$ vérifiant $\alpha \circ \mu_i = \mu_i \circ \alpha^{\otimes 2}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ est de la forme*

$$\alpha(x) = ax + b \text{ et } \alpha(y) = \frac{1}{a}y + c \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Il munit $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star_\alpha = \alpha \circ \star, \alpha)$ d'une structure d'algèbre Hom-associative.

Preuve. Soit $\alpha : \mathbb{R}[x, y][[\lambda]] \rightarrow \mathbb{R}[x, y][[\lambda]]$ un morphisme tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha \circ \mu_i = \mu_i \circ \alpha^{\otimes 2}$. En particulier, pour $i = 0$,

$$\alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g),$$

ce qui montre que α est multiplicatif, donc il est suffisant de le définir sur x et y . Pour $i = 1$, on a

$$\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{\partial \alpha(f)}{\partial x} \frac{\partial \alpha(g)}{\partial y}, \quad (7.2.4)$$

ce qui implique que $\alpha(\{f, g\}) = \{\alpha(f), \alpha(g)\}$.

On pose $P_1(x, y) := \alpha(x)$ et $P_2(x, y) := \alpha(y)$. Pour $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$, l'équation (7.2.4) donne

$$1 = \alpha(1) = \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial y},$$

donc il faut que $P_1(x, y) = ax + Q_1(y)$ et $P_2(x, y) = \frac{1}{a}y + Q_2(x)$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[x, y]$. Pour $f(x, y) = y$ et $g(x, y) = x$, l'équation (7.2.4) donne

$$0 = \alpha(0) = \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_1}{\partial y} = Q'_{2,x} Q'_{1,y}.$$

On peut donc supposer que $Q_1(y) = b$ est constant. En reportant dans l'équation (7.2.4), avec $f(x, y) = g(x, y) = y$, on trouve

$$0 = \alpha(0) = \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial y} = Q'_{2,x} \frac{1}{a},$$

ainsi $Q_2(x) = c$ est constant. Il reste à vérifier que pour $i > 1$, $\alpha \mu_i = \mu_i \alpha^{\otimes 2}$ i.e. pour $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$, $\alpha \left(\frac{\partial^i f}{\partial x^i} \frac{\partial^i g}{\partial y^i} \frac{1}{i!} \right) = \frac{\partial^i \alpha(f)}{\partial x^i} \frac{\partial^i \alpha(g)}{\partial y^i} \frac{1}{i!}$. Par multiplicativité de α , le seul cas non trivial est $f(x, y) = x^n$ et $g(x, y) = y^m$. On a

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{\partial^i f}{\partial x^i} \frac{\partial^i g}{\partial y^i} \frac{1}{i!} \right) &= \alpha \left(i! \binom{n}{i} x^{n-i} i! \binom{m}{i} y^{m-i} \frac{1}{i!} \right) = i! \binom{n}{i} i! \binom{m}{i} (ax + b)^{n-i} \left(\frac{1}{a}y + c \right)^{m-i} \frac{1}{i!} \\ &= i! \binom{n}{i} i! \binom{m}{i} (ax + b)^{n-i} a^i \left(\frac{1}{a}y + c \right)^{m-i} \left(\frac{1}{a} \right)^i \frac{1}{i!} = \frac{\partial^i (ax + b)^n}{\partial x^i} \frac{\partial^i \left(\frac{1}{a}y + c \right)^m}{\partial y^i} \frac{1}{i!} \\ &= \frac{\partial^i \alpha(f)}{\partial x^i} \frac{\partial^i \alpha(g)}{\partial y^i} \frac{1}{i!}. \end{aligned}$$

□

La Hom-algèbre $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star_\alpha, \alpha)$ est Hom-associative mais non associative si $\alpha \neq id$. En effet, pour $f(x, y) = 1$, $g(x, y) = y$ et $h(x, y) = x$, on a

$$\begin{aligned} (f \star_\alpha g) \star_\alpha h &= \alpha(\alpha(f) \star \alpha(g)) \star \alpha(h) \\ &= \alpha \left(1 \star \frac{1}{a}y + c \right) \star (ax + b) = \alpha \left(\frac{1}{a}y + c \right) \star (ax + b), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f \star_\alpha (g \star_\alpha h) &= \alpha(\alpha(f)) \star \alpha(\alpha(g)) \star \alpha(h) \\ &= 1 \star \alpha \left(\left(\frac{1}{a}y + c \right) \star (ax + b) \right) = \alpha \left(\frac{1}{a}y + c \right) \star \alpha(ax + b) \end{aligned}$$

qui sont en général différents.

Plus généralement, on peut considérer l'algèbre de Poisson $(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \cdot, \{, \})$ des polynômes de n variables, $n \geq 3$, où le crochet de Poisson de deux polynômes est donné par $\{f, g\} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \tau_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$, avec $\tau = (\tau_{ij})$ une matrice $n \times n$ réelle antisymétrique.

L'algèbre associative associée est $(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n][[\lambda]], \star)$ où le \star -produit est donné par

$$f \star g = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{1 \leq i_1, j_1, \dots, i_n, j_n \leq n} \sigma_{i_1 j_1} \cdots \sigma_{i_n j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad (7.2.5)$$

où $\sigma = (\sigma_{ij})$ est la matrice dont l'antisymétrisée est τ . Pour $n \geq 3$,

$$\text{notons } \mu_n = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1, j_1, \dots, i_n, j_n \leq n} \sigma_{i_1 j_1} \cdots \sigma_{i_n j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}.$$

Proposition 7.2.5 *Tout morphisme $\alpha : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ vérifiant $\alpha \circ \mu_i = \mu_i \circ \alpha^{\otimes 2}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ donnant à $(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n][[\lambda]], \star_\alpha = \alpha \star, \alpha)$ une structure d'algèbre Hom-associative est de la forme*

$$\forall 1 \leq i \leq n, \alpha(x_i) = x_i + b_i \quad \text{ou} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \alpha(x_i) = -x_i + b_i,$$

avec $b_i \in \mathbb{R}$.

Preuve. La preuve est similaire au cas de deux variables, on obtient $\alpha(x_i) = a_i x_i + b_i$, sauf que cette fois, $a_i a_j = 1$ pour tous $i \neq j$, ce qui donne les deux cas de la proposition. \square

Pour obtenir une algèbre Hom-associative à partir de $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star)$, la condition $\forall i \in \mathbb{N}, \alpha \circ \mu_i = \mu_i \circ \alpha^{\otimes 2}$ est très restrictive. On verra comment construire d'autres morphismes permettant d'obtenir une algèbre Hom-associative par twist, en quantifiant les morphismes de l'algèbre de Poisson R associée.

7.2.2 Twists du crochet de Poisson

On considère toujours l'algèbre de Poisson $R = (\mathbb{R}[x, y], \cdot, \{, \})$. Pour construire une algèbre Hom-Poisson $(\mathbb{R}[x, y], \cdot, \{, \}_\alpha = \alpha \circ \{, \}, \alpha)$ en utilisant le principe de twist Théorème 6.1.4, il

faut disposer d'un morphisme d'algèbre de Poisson $\alpha : \mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}[x, y]$.

Un tel morphisme préserve en particulier la multiplication point par point et est donc entièrement déterminé par ses images sur x et y . En notant $\alpha(x) =: \phi_1(x, y)$, $\alpha(y) =: \phi_2(x, y)$ où $\phi_i \in \mathbb{R}[x, y]$, appliquer le morphisme de Poisson α correspond à précomposer par une application polynomiale $\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, i.e. $\alpha(f) = \phi^*(f) = f \circ \phi$.

Proposition 7.2.6 *L'application $\phi^* : \mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}[x, y]$ est un morphisme d'algèbre de Poisson si, et seulement si*

$$J_\phi = \begin{vmatrix} \partial_x \phi_1 & \partial_y \phi_1 \\ \partial_x \phi_2 & \partial_y \phi_2 \end{vmatrix} = \partial_x \phi_1 \partial_y \phi_2 - \partial_x \phi_2 \partial_y \phi_1 = 1 \quad (7.2.6)$$

où J_ϕ est le déterminant jacobien de ϕ .

Preuve. L'application ϕ^* est déterminée par $\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Soient $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$. Par définition, on a

$$(f \cdot g) \circ \phi = f \circ \phi \cdot g \circ \phi \Leftrightarrow \phi^*(f \cdot g) = \phi^*(f) \cdot \phi^*(g).$$

Dans la suite, on peut supposer par linéarité que $f(x, y) = ax^k y^l$ et $g(x, y) = bx^p y^q$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $k, l, p, q \in \mathbb{N}$. On a d'une part

$$\begin{aligned} \{f \circ \phi, g \circ \phi\} &= \partial_x(a\phi_1^k \phi_2^l) \partial_y(b\phi_1^p \phi_2^q) - \partial_y(a\phi_1^k \phi_2^l) \partial_x(b\phi_1^p \phi_2^q) \\ &= ab(kq - lp) \phi_1^{k+p-1} \phi_2^{l+q-1} (\partial_x \phi_1 \partial_y \phi_2 - \partial_x \phi_2 \partial_y \phi_1) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \{f, g\} \circ \phi &= (\partial_x(ax^k y^l) \partial_y(bx^p y^q) - \partial_y(ax^k y^l) \partial_x(bx^p y^q)) \circ \phi \\ &= ab(kq - lp) \phi_1^{k+p-1} \phi_2^{l+q-1}. \end{aligned}$$

Par identification, ϕ^* est un morphisme de Poisson si, et seulement si on a l'équation $J_\phi = 1$. \square

Les automorphismes polynomiaux de \mathbb{R}^2 sont connus, ceux ayant un jacobien constant égal à un sont les éléments engendrés par les transformations triangulaires¹.

Théorème 7.2.7 (Théorème des automorphismes) *Soit \mathbb{K} un corps. Le groupe des automorphismes polynomiaux $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$ est engendré par les transformations affines $(x, y) \mapsto (a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2)$ où $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K}$ avec $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, et par les transformations triangulaires $(x, y) \mapsto (x, y + p(x))$ où $p \in \mathbb{K}[x]$.*

1. car leur matrice jacobienne est triangulaire

En revanche, si on ne suppose pas *a priori* que l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bijective, le fait que $J_\phi = 1$ ne permet pas encore de conclure que ϕ est inversible. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est l'objet de la conjecture jacobienne, qui reste un problème ouvert même pour $n = 2$.

Conjecture Jacobienne

Une application polynomiale de \mathbb{C}^n de jacobien constant non nul est un automorphisme de \mathbb{C}^n .

Le théorème des automorphismes a été découvert par Jung en 1942 pour les corps de caractéristique 0 et étendu par Van der Kulk aux corps de caractéristique quelconque. Différentes preuves ont été proposées, une preuve simple sur \mathbb{C} et des références sont données dans l'article [VC03], qui comporte également des références aux travaux sur la conjecture jacobienne.

Corollaire 7.2.8 *Le groupe des automorphismes de Poisson de $R = (\mathbb{R}[x, y], \cdot, \{, \})$ est engendré par les transformations triangulaires inférieures $(x, y) \mapsto (x, y + p(x))$ et supérieures $(x, y) \mapsto (x + q(y), y)$, où $p \in \mathbb{K}[x]$, $q \in \mathbb{K}[y]$.*

Preuve. En effet, notons sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

les transformations linéaires, et

$$\begin{pmatrix} 1 & q(y)/y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + q(y) \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(x)/x & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y + p(x) \end{pmatrix}$$

les transformations triangulaires supérieures et inférieures. Les automorphismes de Poisson étant de déterminant jacobien unité, pour un automorphisme produit de transformations linéaires et triangulaires, les transformations linéaires doivent être de jacobien unité également, les triangulaires l'étant déjà. Ainsi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \det M = ad - bc = 1 \right\}.$$

Or $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ est engendré par les transvections, qui sont précisément les matrices des morphismes triangulaires avec un polynôme p ou q linéaire, d'où le résultat. \square

7.2.3 Quantification des automorphismes de Poisson

Dans cette section, on expose la façon de quantifier les automorphismes de l'algèbre de Poisson R « à la Fedosov », (voir [Fed96]), pour obtenir des morphismes de l'algèbre associative de Moyal-Weyl.

Morphismes et flots

Considérons un morphisme triangulaire $\phi(x, y) = (x, y + p(x))$, avec $p \in \mathbb{R}[x]$. Quitte à ajouter un paramètre t , on peut supposer que $\phi_t(x, y) = (x, y + tp(x))$ est le flot de l'équation hamiltonienne

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = p(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 + tp(x_0) \end{cases} \quad (7.2.7)$$

avec $H(x, y) = -\int p(x)dx$ une primitive de $-p$. Ainsi $\phi_0(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ est l'identité de \mathbb{R}^2 et $\phi_t(x_0, y_0) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0 + tp(x_0))$ est la solution au temps t .

En dérivant par rapport à t , on a

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x, y) = (0, p(x)) = X_H(x(t), y(t)) = X_H \circ \phi_t(x, y)$$

où $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y} \quad -\frac{\partial H}{\partial x} \right)$ est la dérivée de Lie de H .

En tant que fonction du temps $\phi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, le flot vérifie donc l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t = X_H \circ \phi_t \\ \phi_0 = id_{\mathbb{R}^2} \end{cases} \quad (7.2.8)$$

On obtient la même équation pour le flot d'un morphisme triangulaire $(x, y) \mapsto (x + tq(y), y)$ avec $q \in \mathbb{R}[y]$.

Une équation différentielle formelle de ce type permet d'écrire de manière concise la récurrence cachée liant les coefficients de la série formelle solution cherchée. Une telle équation différentielle formelle admet une unique solution (voir [Che61, Theorem 1.1]) donnée par intégrations itérées

$$\phi_t = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} Q_k(t) \right) \phi_0 \quad \text{avec } Q_{k+1}(t) = \int_0^t X_H(s) Q_k(s) ds \text{ et } Q_0 = id \quad (7.2.9)$$

De plus, si $X_H(t) = X_H$ est constant par rapport au temps comme c'est le cas ici, on obtient

$$\phi_t = e^{tX_H} \phi_0. \quad (7.2.10)$$

Comme on travaille dans le domaine polynomial, avec des compositions successives d'opérateurs différentiels, les séries considérées sont des sommes finies lorsqu'elles sont évaluées sur des polynômes.

En considérant le morphisme d'algèbre de Poisson associé au flot : $\phi_t^*(f) = f \circ \phi_t$, on a

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \phi_t \quad \frac{\partial f}{\partial y} \circ \phi_t \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \circ \phi_t \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \circ \phi_t \end{pmatrix} = \{f, H\} \circ \phi_t,$$

donc le morphisme de Poisson ϕ_t^* est déterminé par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t^* = -\phi_t^* \circ P_H \\ \phi_0^* = id_{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{où } P_H(f) = \{H, f\}. \quad (7.2.11)$$

De manière plus générale, pour un automorphisme de Poisson $\psi_t^* = \phi_t^{1*} \circ \dots \circ \phi_t^{n*}$ où les ϕ_t^{i*} sont des morphismes triangulaires, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_t^* &= \sum_{k=1}^n \phi_t^{1*} \circ \dots \circ \phi_t^{k-1*} \circ \frac{d}{dt}\phi_t^{k*} \circ \phi_t^{k+1*} \dots \circ \phi_t^{n*} \\ &= -\sum_{k=1}^n \phi_t^{1*} \circ \dots \circ \phi_t^{k-1*} \circ P_{H_k} \circ \phi_t^{k+1*} \dots \circ \phi_t^{n*} \\ &= -\psi_t^* \circ \sum_{k=1}^n \left(\phi_t^{k+1*} \dots \circ \phi_t^{n*} \right)^{-1} \circ P_{H_k} \circ \underbrace{\phi_t^{k+1*} \dots \circ \phi_t^{n*}}_{\phi_t^{>k*}} \end{aligned}$$

où $P_{H_k}(f) = \{H_k, f\}$ avec les différents hamiltoniens H_k correspondants aux morphismes triangulaires ϕ_k . Comme

$$\begin{aligned} \left(\left(\phi_t^{>k*} \right)^{-1} \circ P_{H_k} \circ \phi_t^{>k*} \right) (f) &= \left(\phi_t^{>k*} \right)^{-1} \left(\{H_k, \phi_t^{>k*}(f)\} \right) \\ &= \left\{ \left(\phi_t^{>k*} \right)^{-1} (H_k), f \right\} \\ &=: P_{H_t^k}(f), \end{aligned}$$

en posant $P_{H_t} = \sum_{k=1}^n P_{H_t^k}$, on obtient que le morphisme de Poisson ψ_t^* est déterminé par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_t^* = -\psi_t^* \circ P_{H_t}, \\ \psi_0^* = id_{\mathbb{R}} \end{cases}, \quad (7.2.12)$$

cette fois, l'opérateur P_{H_t} dépend du temps t .

On peut retrouver le fait que ψ_t^* est un morphisme de \mathbb{R} par différentiation. Soit

$$A_t(f \otimes g) := \psi_t^*(\{f, g\}) - \{\psi_t^*(f), \psi_t^*(g)\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_t &= \frac{d}{dt}(\psi_t^*({f, g}) - \{\psi_t^*(f), \psi_t^*(g)\}) \\
&= -\psi_t^*({H_t, {f, g}}) + \{\psi_t^*({H_t, f}), \psi_t^*(g)\} \\
&\quad + \{\psi_t^*(f), \psi_t^*({H_t, g})\} \\
&= -\psi_t^*({H_t, f, g}) + \{\psi_t^*({H_t, f}), \psi_t^*(g)\} \\
&\quad - \psi_t^*({f, {H_t, g}}) + \{\psi_t^*(f), \psi_t^*({H_t, g})\} \\
&= -A_t({H_t, f} \otimes g) - A_t(f \otimes {H_t, g})
\end{aligned}$$

donc A_t vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}A_t = -A_t \circ (P_{H_t} \otimes id + id \otimes P_{H_t})$$

avec la condition initiale $A_0 = 0$. L'unique solution est donc $A_t = A_0 = 0$, donc on retrouve le fait que ψ_t^* préserve le crochet de Poisson.

Quantification

Pour quantifier les automorphismes de Poisson et obtenir des morphismes de l'algèbre associative $^2 (\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star)$, on remplace dans l'équation (7.2.12) $P_{H_t} = \{H_t, \}$ par $Q_{H_t} : f \mapsto \frac{1}{\lambda}(H_t \star f - f \star H_t)$.

Comme dans (7.2.9), les solutions de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\alpha_t = -\alpha_t \circ Q_{H_t} \\ \alpha_0 = id \end{cases} \quad (7.2.13)$$

s'écrivent comme des séries formelles

$$\alpha_t = id + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^t \left(\int_0^{t_1} \cdots \left(\int_0^{t_{n-1}} Q_{H_{t_n}} dt_n \right) \circ Q_{H_{t_{n-1}}} dt_{n-1} \circ \cdots \right) \circ Q_{H_{t_1}} dt_1.$$

Pour montrer que ce sont des morphismes de $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star)$ i.e. préservant le produit \star , posons

$$B_t(f \otimes g) := \alpha_t(f \star g) - \alpha_t(f) \star \alpha_t(g).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B_t &= \frac{d}{dt}(\alpha_t(f \star g) - \alpha_t(f) \star \alpha_t(g)) \\
&= -\alpha_t \circ Q_{H_t}(f \star g) + (\alpha_t \circ Q_{H_t}(f)) \star \alpha_t(g) + \alpha_t(f) \star (\alpha_t \circ Q_{H_t}(g)) \\
&= -B_t(Q_{H_t}(f) \otimes g) - B_t(f \otimes Q_{H_t}(g))
\end{aligned}$$

2. où \star désigne ici indifféremment le \star -produit de Moyal-Weyl ou sa forme équivalente simplifiée

donc B_t vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}B_t = -B_t \circ (Q_{H_t} \otimes id + id \otimes Q_{H_t})$$

avec la condition initiale $B_0 = 0$. L'unique solution est donc $B_t = B_0 = 0$, ce qui montre que α_t est un morphisme de $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star)$.

En particulier, si on prend un seul morphisme triangulaire $\phi_t(x, y) = (x, y + tp(x))$ avec $p \in \mathbb{R}[x]$ de degré d et $H(x, y) = -\int p(x)dx$ le hamiltonien correspondant, $Q_{H_t} = Q_H$ ne dépend pas de t .

Comme H est une fonction de x seulement, pour le \star -produit de Moyal-Weyl (7.2.2), on a

$$Q_H(f) = \frac{1}{\lambda}(H \star_{MW} f - f \star_{MW} H) = - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} p^{(2k)}(x) \partial_y^{2k+1}(f),$$

et pour le \star -produit (7.2.3)

$$Q_H(f) = \frac{1}{\lambda}(H \star f - f \star H) = - \sum_{n=1}^{d+2} \frac{\lambda^n}{n!} p^{(n-1)}(x) \partial_y^n(f).$$

L'opérateur Q_H ne dépendant pas de t , l'équation différentielle (7.2.13) s'intègre en

$$\alpha_t = e^{-tQ_H},$$

qui est une somme finie lorsqu'elle est évaluée sur un polynôme f , car les compositions Q_H^n ne font intervenir que des dérivées partielles successives par rapport à y de f .

Ainsi, on obtient des exemples de morphismes α_t de $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star)$ autres que ceux de la Proposition 7.2.4 permettant d'obtenir une algèbre Hom-associative $(\mathbb{R}[x, y][[\lambda]], \star_{\alpha_t}, \alpha)$ par principe de twist.

A

CALCULS *Mathematica*

SOMMAIRE

A.1	CALCUL DES MORPHISMES DE $\mathfrak{sl}(2)$	130
A.2	STRUCTURES HOM-LIE ASSOCIÉES AU CROCHET DE JACKSON $\mathfrak{sl}(2)$	133

ON donne ici les commandes *Mathematica* ayant servi à effectuer différents calculs afin d'obtenir des algèbres Hom-Lie.

A.1 CALCUL DES MORPHISMES DE $\mathfrak{sl}(2)$

On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ engendrée par $\{e, f, h\}$ avec le crochet donné par $[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$.

On cherche les morphismes $\alpha : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{sl}(2)$ vérifiant $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$. On écrit $\alpha = (a_{ij})$ dans la base $\{e, f, h\}$. Cette méthode a été utilisée dans [Yau11].

On définit le crochet de Lie pour qu'il vérifie les propriétés de bilinéarité.

```

Croch[f_ + g_, h_] := Croch[f, h] + Croch[g, h]
Croch[f_, g_ + h_] := Croch[f, g] + Croch[f, h]
Croch[t_Real f_, g_] := tCroch[f, g]
Croch[t_Rational f_, g_] := tCroch[f, g]
Croch[t_Integer f_, g_] := tCroch[f, g]
Croch[f_, t_Real g_] := tCroch[f, g]
Croch[f_, t_Rational g_] := tCroch[f, g]
Croch[f_, t_Integer g_] := tCroch[f, g]
{Croch[a[i_, j_]f_, g_] := a[i, j]Croch[f, g], Croch[f_, a[i_, j_]g_] := a[i, j]Croch[f, g]}
{Null, Null}

```

On donne les valeurs du crochet sur la base.

```

{Croch[e, e] = 0, Croch[e, f] = h, Croch[e, h] = -2e,
Croch[f, e] = -h, Croch[f, f] = 0, Croch[f, h] = 2f,
Croch[h, e] = 2e, Croch[h, f] = -2f, Croch[h, h] = 0}
{0, h, -2e, -h, 0, 2f, 2e, -2f, 0}

```

On définit les propriétés de linéarité et multiplicativité du morphisme α .

```

alpha[0] := 0; alpha[1] := 1;
alpha[x_ + y_] := alpha[x] + alpha[y]
alpha[x_ y_] := alpha[x] alpha[y]
alpha[x_^n_Integer] := alpha[x]^n
alpha[t_Real x_] := talpha[x]
alpha[t_Rational x_] := talpha[x]
alpha[t_Integer x_] := talpha[x]

```

On définit le morphisme α de façon matricielle.

```

A = Array[a, {3, 3}]
{{a[1, 1], a[1, 2], a[1, 3]}, {a[2, 1], a[2, 2], a[2, 3]}, {a[3, 1], a[3, 2], a[3, 3]}}
MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} a[1, 1] & a[1, 2] & a[1, 3] \\ a[2, 1] & a[2, 2] & a[2, 3] \\ a[3, 1] & a[3, 2] & a[3, 3] \end{pmatrix}$$


```

On calcule les images de α sur la base.

X = {e, f, h}

{e, f, h}

For[i = 1, i < 4, i++, **alpha**[X[[i]]] = (**Transpose**[A].X)[[i]]]

i=.

{alpha[e], **alpha**[f], **alpha**[h]}

{ea[1, 1]+fa[2, 1]+ha[3, 1], ea[1, 2]+fa[2, 2]+ha[3, 2], ea[1, 3]+fa[2, 3]+ha[3, 3]}

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} ea[1, 1] + fa[2, 1] + ha[3, 1] \\ ea[1, 2] + fa[2, 2] + ha[3, 2] \\ ea[1, 3] + fa[2, 3] + ha[3, 3] \end{pmatrix}$$

On écrit les polynômes en e, f, h obtenus par calcul de $\alpha([x, y]) - [\alpha(x), \alpha(y)]$ sur la base. Seulement trois de ces polynômes sont nécessaires, ce sont $\alpha([e, f]) - [\alpha(e), \alpha(f)]$, $\alpha([e, h]) - [\alpha(e), \alpha(h)]$, $\alpha([f, h]) - [\alpha(f), \alpha(h)]$.

poly = SparseArray[[{i_, j_} → **If**[i >= j, 0,

Collect[**Expand**[**Croch**[**alpha**[X[[i]]], **alpha**[X[[j]]]]] - **alpha**[**Croch**[X[[i]], X[[j]]]], {e, f, h}]], {3, 3}]

SparseArray[< 3 >, {3, 3}]

Normal[**poly**]

{{0, e(-a[1, 3]+2a[1, 2]a[3, 1]-2a[1, 1]a[3, 2])+f(-a[2, 3]-2a[2, 2]a[3, 1]+2a[2, 1]a[3, 2])+h(-a[1, 2]a[2, 1]+a[1, 1]a[2, 2]-a[3, 3]), h(-a[1, 3]a[2, 1]+a[1, 1]a[2, 3]+2a[3, 1])+e(2a[1, 1]+2a[1, 3]a[3, 1]-2a[1, 1]a[3, 3])+f(2a[2, 1]-2a[2, 3]a[3, 1]+2a[2, 1]a[3, 3]), {0, 0, h(-a[1, 3]a[2, 2]+a[1, 2]a[2, 3]-2a[3, 2])+e(-2a[1, 2]+2a[1, 3]a[3, 2]-2a[1, 2]a[3, 3])+f(-2a[2, 2]-2a[2, 3]a[3, 2]+2a[2, 2]a[3, 3]), {0, 0, 0}}

Pour annuler ces polynômes, on extrait leurs coefficients en e, f, h et on résoud les équations obtenues, les inconnues étant les coefficients a_{ij} du morphisme α .

For[i = 1, i < 4, i++,

For[j = 1, j < 4, j++,

If[i < j, **coefs**[i, j] = **CoefficientList**[**poly**[[i, j]], {e, f, h}, 0]

]

vars = Normal[**Flatten**[A]]

{a[1, 1], a[1, 2], a[1, 3], a[2, 1], a[2, 2], a[2, 3], a[3, 1], a[3, 2], a[3, 3]}

eqs = DeleteCases[**Flatten**[[**coefs**[1, 2], **coefs**[1, 3], **coefs**[2, 3]]], 0]

{-a[1, 2]a[2, 1]+a[1, 1]a[2, 2]-a[3, 3], -a[2, 3]-2a[2, 2]a[3, 1]+2a[2, 1]a[3, 2], -a[1, 3]+2a[1, 2]a[3, 1]-2a[1, 1]a[3, 2], -a[1, 3]a[2, 1]+a[1, 1]a[2, 3]+2a[3, 1], 2a[2, 1]-2a[2, 3]a[3, 1]+2a[2, 1]a[3, 3], 2a[1, 1]+2a[1, 3]a[3, 1]-2a[1, 1]a[3, 3], -a[1, 3]a[2, 2]+a[1, 2]a[2, 3]-2a[3, 2], -2a[2, 2]-2a[2, 3]a[3, 2]+2a[2, 2]a[3, 3], -2a[1, 2]+2a[1, 3]a[3, 2]-2a[1, 2]a[3, 3]}

zeros = Table[0, {i, **Length**[eqs]]

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

sols = Solve[eqs == zeros, vars]

Solve::svars:Equations may not give solutions for all "solve" variables.))

$$\left\{ \left\{ a[1,1] \rightarrow -\frac{a[3,1]^2}{a[2,1]}, a[1,3] \rightarrow \frac{2a[3,1]}{a[2,1]}, a[1,2] \rightarrow \frac{1}{a[2,1]}, a[2,3] \rightarrow 0, \right. \right.$$

$$a[3,3] \rightarrow -1, a[2,2] \rightarrow 0, a[3,2] \rightarrow 0 \left. \right\},$$

$$\left\{ a[1,1] \rightarrow \frac{1}{a[2,2]}, a[1,3] \rightarrow 0, a[1,2] \rightarrow 0, a[2,1] \rightarrow -\frac{a[2,3]^2}{4a[2,2]}, \right.$$

$$a[3,1] \rightarrow -\frac{a[2,3]}{2a[2,2]}, a[3,3] \rightarrow 1, a[3,2] \rightarrow 0 \left. \right\},$$

$$\left\{ a[1,1] \rightarrow \frac{1+2a[3,3]+a[3,3]^2}{4a[2,2]}, a[1,3] \rightarrow \frac{-a[3,2]-a[3,2]a[3,3]}{a[2,2]}, a[1,2] \rightarrow -\frac{a[3,2]^2}{a[2,2]}, \right.$$

$$a[2,1] \rightarrow -\frac{a[2,2](1-2a[3,3]+a[3,3]^2)}{4a[3,2]^2}, a[3,1] \rightarrow \frac{1-a[3,3]^2}{4a[3,2]}, a[2,3] \rightarrow \frac{a[2,2](-1+a[3,3])}{a[3,2]} \left. \right\},$$

$$\{ a[1,1] \rightarrow 0, a[1,3] \rightarrow 0, a[1,2] \rightarrow 0, a[2,1] \rightarrow 0, a[3,1] \rightarrow 0,$$

$$a[2,3] \rightarrow 0, a[3,3] \rightarrow 0, a[2,2] \rightarrow 0, a[3,2] \rightarrow 0 \}$$

Les morphismes α qui conviennent sont de la forme suivante.

MatrixForm[A]/.sols

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} -\frac{a[3,1]^2}{a[2,1]} & \frac{1}{a[2,1]} & \frac{2a[3,1]}{a[2,1]} \\ a[2,1] & 0 & 0 \\ a[3,1] & 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{a[2,2]} & 0 & 0 \\ -\frac{a[2,3]^2}{4a[2,2]} & a[2,2] & a[2,3] \\ -\frac{a[2,3]}{2a[2,2]} & 0 & 1 \end{array} \right), \right.$$

$$\left. \left(\begin{array}{ccc} \frac{1+2a[3,3]+a[3,3]^2}{4a[2,2]} & -\frac{a[3,2]^2}{a[2,2]} & \frac{-a[3,2]-a[3,2]a[3,3]}{a[2,2]} \\ -\frac{a[2,2](1-2a[3,3]+a[3,3]^2)}{4a[3,2]^2} & a[2,2] & \frac{a[2,2](-1+a[3,3])}{a[3,2]} \\ \frac{1-a[3,3]^2}{4a[3,2]} & a[3,2] & a[3,3] \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

Ces morphismes sont bien inversibles, puisqu'ils sont tous de déterminant non nul, de plus, ce déterminant est 1 (sauf pour le morphisme nul).

Simplify[Det[A]/.sols]

$$\{1, 1, 1, 0\}$$

On renomme les paramètres.

Part[MatrixForm[A]/.sols, 1]/.{1/a[2,1] → λ, a[2,1] → 1/λ, a[3,1] → μ}

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} -\lambda\mu^2 & \lambda & 2\lambda\mu \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -1 \end{array} \right) \right\}$$

Part[MatrixForm[A]/.sols, 2]/.{1/a[2,2] → λ, a[2,2] → 1/λ, a[2,3] → μ}

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda\mu^2}{4} & \frac{1}{\lambda} & \mu \\ -\frac{\lambda\mu}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

Part[MatrixForm[A]/.sols, 3]/.{1/a[2,2] → λ, a[2,2] → 1/λ, a[3,3] → μ, a[3,2] → ν}

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{4}\lambda(1+2\mu+\mu^2) & -\lambda\nu^2 & \lambda(-\nu-\mu\nu) \\ -\frac{1-2\mu+\mu^2}{4\lambda\nu^2} & \frac{1}{\lambda} & \frac{-1+\mu}{\lambda\nu} \\ \frac{1-\mu^2}{4\nu} & \nu & \mu \end{array} \right) \right\}$$

Ces matrices correspondent aux automorphismes $\mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{sl}(2)$,
 $X \mapsto A^{-1}.X.A$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1/b & d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda = -c^2, \mu = 2bd \quad \text{pour la première,}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda = d^2, \mu = -ab \quad \text{pour la deuxième,}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda = 1/a^2, \mu = 1 + 2bc, \nu = -2ac \quad \text{pour la troisième.}$$

A.2 STRUCTURES HOM-LIE ASSOCIÉES AU CROCHET DE JACKSON $\mathfrak{sl}(2)$

On obtient l'algèbre de Lie Jackson $\mathfrak{sl}(2)$ par déformation. Elle est engendrée par $\{e, f, h\}$ avec le crochet donné par $[h, e] = 2e, [h, f] = -2(1+t)f, [e, f] = (1 + \frac{t}{2})h$.

On définit ce nouveau crochet comme auparavant pour qu'il vérifie les propriétés de bilinéarité.

$$\begin{aligned} \text{Croch}[f_ + g_ , h_] &:= \text{Croch}[f, h] + \text{Croch}[g, h] \\ \text{Croch}[f_ , g_ + h_] &:= \text{Croch}[f, g] + \text{Croch}[f, h] \\ \text{Croch}[t_ \text{Real } f_ , g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \\ \text{Croch}[t_ \text{Rational } f_ , g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \\ \text{Croch}[t_ \text{Integer } f_ , g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \\ \text{Croch}[f_ , t_ \text{Real } g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \\ \text{Croch}[f_ , t_ \text{Rational } g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \\ \text{Croch}[f_ , t_ \text{Integer } g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \\ \{\text{Croch}[a[i_ , j_]f_ , g_] &:= a[i, j] \text{Croch}[f, g], \text{Croch}[f_ , a[i_ , j_]g_] := a[i, j] \text{Croch}[f, g]\} \\ \{\text{Null}, \text{Null}\} \\ \text{Croch}[t f_ , g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \\ \text{Croch}[f_ , t g_] &:= t \text{Croch}[f, g] \end{aligned}$$

On donne les valeurs du crochet sur la base.

$$\begin{aligned} \{\text{Croch}[e, e] = 0, \text{Croch}[e, f] = (1 + t/2)h, \text{Croch}[e, h] = -2e, \\ \text{Croch}[f, e] = -(1 + t/2)h, \text{Croch}[f, f] = 0, \text{Croch}[f, h] = 2(1 + t)f, \\ \text{Croch}[h, e] = 2e, \text{Croch}[h, f] = -2(1 + t)f, \text{Croch}[h, h] = 0\} \\ \{0, h(1 + \frac{t}{2}), -2e, h(-1 - \frac{t}{2}), 0, 2f(1 + t), 2e, -2f(1 + t), 0\} \end{aligned}$$

On cherche les différentes application linéaires α qui vérifie l'identité de Hom-Jacobi pour ce crochet. On définit les propriétés de linéarité de α .

$$\begin{aligned} \text{alpha}[0] &:= 0; \text{alpha}[1] := 1; \\ \text{alpha}[x_ + y_] &:= \text{alpha}[x] + \text{alpha}[y] \\ \text{alpha}[t_ \text{Real } x_] &:= t \text{alpha}[x] \\ \text{alpha}[t_ \text{Rational } x_] &:= t \text{alpha}[x] \end{aligned}$$

alpha[t_Integer x_] := t alpha[x]

alpha[tf_] := t alpha[f]

On définit l'application α de façon matricielle.

A = Array[a, {3, 3}]

{{a[1, 1], a[1, 2], a[1, 3]}, {a[2, 1], a[2, 2], a[2, 3]}, {a[3, 1], a[3, 2], a[3, 3]}}

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} a[1, 1] & a[1, 2] & a[1, 3] \\ a[2, 1] & a[2, 2] & a[2, 3] \\ a[3, 1] & a[3, 2] & a[3, 3] \end{pmatrix}$$

X = {e, f, h}

{e, f, h}

For[i = 1, i < 4, i++, alpha[X[[i]]] = (Transpose[A].X)[[i]]]

i=.

{alpha[e], alpha[f], alpha[h]}

{ea[1, 1] + fa[2, 1] + ha[3, 1], ea[1, 2] + fa[2, 2] + ha[3, 2], ea[1, 3] + fa[2, 3] + ha[3, 3]}

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} ea[1, 1] + fa[2, 1] + ha[3, 1] \\ ea[1, 2] + fa[2, 2] + ha[3, 2] \\ ea[1, 3] + fa[2, 3] + ha[3, 3] \end{pmatrix}$$

Il s'agit de caractériser les coefficients de α pour que l'identité de Hom-Jacobi soit vérifiée.

Jac = Croch[alpha[e], Croch[f, h]]

+Croch[alpha[f], Croch[h, e]]

+Croch[alpha[h], Croch[e, f]]

2h(-1 - $\frac{t}{2}$)a[2, 2] + 4ea[3, 2] + a[1, 3]Croch[e, h(1 + $\frac{t}{2}$)] + 2a[1, 1]Croch[e, f(1 + t)] + a[2, 3]Croch[f, h(1 + $\frac{t}{2}$)] + 2a[2, 1]Croch[f, f(1 + t)] + a[3, 3]Croch[h, h(1 + $\frac{t}{2}$)] + 2a[3, 1]Croch[h, f(1 + t)]

On extrait les coefficients de ce polynôme en e, f, h et on résoud le système correspondant pour les annuler, les inconnues étant les coefficients a_{ij} de l'application α .

Collect[ExpandAll[Jac], {e, f, h}]

h(2a[1, 1] + 3ta[1, 1] + t²a[1, 1] - 2a[2, 2] - ta[2, 2])
+f(2a[2, 3] + 3ta[2, 3] + t²a[2, 3] - 4a[3, 1] - 8ta[3, 1] - 4t²a[3, 1])
+e(-2a[1, 3] - ta[1, 3] + 4a[3, 2])

eqs = CoefficientList[Collect[ExpandAll[Jac], {e, f, h}], {e, f, h}]

{{{0, 2a[1, 1] + 3ta[1, 1] + t²a[1, 1] - 2a[2, 2] - ta[2, 2]},
{2a[2, 3] + 3ta[2, 3] + t²a[2, 3] - 4a[3, 1] - 8ta[3, 1] - 4t²a[3, 1], 0}},
{{-2a[1, 3] - ta[1, 3] + 4a[3, 2], 0}, {0, 0}}

equas = DeleteCases[Flatten[eqs], 0]

{2a[1, 1] + 3ta[1, 1] + t²a[1, 1] - 2a[2, 2] - ta[2, 2],
2a[2, 3] + 3ta[2, 3] + t²a[2, 3] - 4a[3, 1] - 8ta[3, 1] - 4t²a[3, 1],
-2a[1, 3] - ta[1, 3] + 4a[3, 2]}

vars = Flatten[A]

$\{a[1,1], a[1,2], a[1,3], a[2,1], a[2,2], a[2,3], a[3,1], a[3,2], a[3,3]\}$

sols = Solve[equas == {0, 0, 0}, vars]

Solve::svars:Equations may not give solutions for all
"solve" variables.))

$\left\{ \left\{ a[3,2] \rightarrow -\frac{1}{4}(-2-t)a[1,3], a[2,2] \rightarrow -(-1-t)a[1,1], a[2,3] \rightarrow \frac{4(1+t)a[3,1]}{2+t} \right\} \right\}$

On renomme les paramètres.

MatrixForm[A]/.sols/.{a[1,1] → a, a[2,1] → b, a[3,1] → c,

a[1,2] → d, a[1,3] → k, a[3,3] → l, t → q - 1} // Simplify

$\left(\begin{pmatrix} a & d & k \\ b & aq & \frac{4cq}{1+q} \\ c & \frac{1}{4}k(1+q) & l \end{pmatrix} \right)$

En spécifiant les coefficients, on retrouve les twists correspondants aux déformations déjà connues.

MatrixForm[A]/.sols/.{a[1,1] → 1 + t, a[2,1] → 0, a[3,1] → 0,

a[1,2] → 0, a[1,3] → 0, a[3,3] → 1 + t} // Simplify

$\left(\begin{pmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & (1+t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix} \right)$

MatrixForm[A]/.sols/.{a[1,1] → (2 + t)/(2(1 + t)), a[2,1] → 0, a[3,1] → 0,

a[1,2] → 0, a[1,3] → 0, a[3,3] → 1} // Simplify

$\left(\begin{pmatrix} \frac{2+t}{2+2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

BIBLIOGRAPHIE

- [AEM11] F. AMMAR, Z. EJBEHI et A. MAKHLOUF – « Cohomology and Deformations of Hom-algebras », *Journal of Lie Theory* **21** (2011), no. 4, p. 813–836. (Cité pages 96, 113 et 115.)
- [AMM02] D. ARNAL, D. MANCHON et M. MASMOUDI – « Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich », *Pacific Journal of Mathematics* **203** (2002), no. 1, p. 23–66.
- [BEM12] M. BORDEMANN, O. ELCHINGER et A. MAKHLOUF – « Twisting Poisson algebras, coPoisson algebras and Quantization », *Travaux Mathématiques XX* (2012), p. 83–120, Special Issue based on the Commemorative Colloquium dedicated to Nikolai Neumaier, Mulhouse, France, Juin 2011. (Cité pages xi et 79.)
- [BFF⁺78] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRØNSDAL, A. LICHNEROWICZ et D. STERNHEIMER – « Deformation theory and quantization I/ II », *Annals of Physics* **111** (1978), no. 1, p. 61–110; 111–151, doi:10.1016/0003-4916(78)90224-5 and doi:10.1016/0003-4916(78)90225-7. (Cité pages ix et 19.)
- [BGH⁺05] M. BORDEMANN, G. GINOT, G. HALBOUT, H.-C. HERBIG et S. WALDMANN – « Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur des sous-variétés coisotropes », arXiv : math/0504276v1 [math.QA], 2005. (Cité page 38.)
- [BM08] M. BORDEMANN et A. MAKHLOUF – « Formality and Deformations of Universal Enveloping Algebras », *International Journal of Theoretical Physics* **47** (2008), p. 311–332. (Cité pages x, 32, 33 et 37.)
- [BMP05] M. BORDEMANN, A. MAKHLOUF et T. PETIT – « Déformation par quantification et rigidité des algèbres envelop-

- pantes », *Journal of Algebra* **285** (2005), no. 2, p. 623–648. (Cité page x.)
- [Bor] M. BORDEMANN – « Deformation of a differential codetermination and L_∞ structures », Notes non publiées. (Cité pages 38 et 43.)
- [Bro65] R. BROWN – « The twisted eilenberg-zilber theorem », *Edizioni Oderisi* (Gubbio) (S. di Topologia, éd.), *Celebrazioni Archimedee del Secolo XX*, (Messina, 1964), 1965, p. 33–37. (Cité page 39.)
- [Car84] R. CARLES – « Sur la structure des algèbres de Lie rigides », *Annales de l'Institut Fourier* **34** (1984), no. 3, p. 65–82. (Cité page 22.)
- [CD84] R. CARLES et Y. DIAKITÉ – « Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension ≤ 7 », *Journal of Algebra* **91** (1984), no. 1, p. 53–63. (Cité page 22.)
- [CE56] H. CARTAN et S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956. (Cité pages 20 et 48.)
- [Che61] K.-T. CHEN – « Formal Differential Equations », *The Annals of Mathematics* **73** (1961), no. 1, p. 110–133. (Cité page 123.)
- [CP94] V. CHARI et A. PRESSLEY – *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, 1994. (Cité page 107.)
- [Dix74] J. DIXMIER – *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974. (Cité page 18.)
- [DM] K. DEKKAR et A. MAKHLOUF – « Cohomology and deformations of Hom-bialgebras and Hom-Hopf algebras », In preparation. (Cité pages xi, 113 et 116.)
- [Fed96] B. FEDOSOV – *Deformation Quantization and Index Theory*, 1 éd., *Mathematical topics*, vol. 9, Akademie Verlag, Berlin, 1996. (Cité page 122.)
- [GAB01] M. GOZE et J. M. ANCOCHEA BERMÚDEZ – « On the classification of Rigid Lie algebras », *Journal of Algebra* **245** (2001), no. 1, p. 68–91. (Cité page 22.)
- [Ger63] M. GERSTENHABER – « The cohomology structure of an associative ring », *Annals of Mathematics* **78** (1963), no. 2, p. 267–288. (Cité pages 14 et 21.)
- [Ger66] — , « On the deformation of rings and algebras II », *Annals of Mathematics* **84** (1966), no. 1, p. 1–19. (Cité pages 19 et 21.)
- [GM96] M. GOZE et A. MAKHLOUF – « Lois d'algèbres et variétés algébriques », *Travaux en cours*, ch. Classification of

- rigid associative algebras in low dimensions, *Travaux en cours*, Hermann, 1996, ISSN 0766-9968 ; 50. (Cité page 22.)
- [GS86] M. GERSTENHABER et S. D. SHACK – « Relative Hochschild cohomology, rigid algebras, and the Bockstein », *Journal of Pure and Applied Algebra* **43** (1986), no. 1, p. 53–74. (Cité page 21.)
- [GS92] — , « Algebras, bialgebras, quantum groups, and algebraic deformations », *Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics* (Providence, Rhode Island) (C. mathematics, éd.), vol. 134, AMS-IMS-SIAM, American Mathematical Society, 1992, p. 51–92. (Cité page xi.)
- [Hal06] G. HALBOUT – « Formality theorems : from associators to a global formulation », *Annales mathématiques Blaise Pascal* **13** (2006), no. 2, p. 313–348.
- [HLS06] J. T. HARTWIG, D. LARSSON et S. D. SILVESTROV – « Deformations of Lie algebras using σ -derivations », *Journal of Algebra* **295** (2006), no. 2, p. 314–361. (Cité pages xi et 87.)
- [Hof07] L. HOFER – « Aspects algébriques et quantification des surfaces minimales », Thèse, Université de Mulhouse, 2007. (Cité page 48.)
- [HS53] G. HOCHSCHILD et J.-P. SERRE – « Cohomology of Lie algebras », *The Annals of Mathematics* **57** (1953), no. 3, p. 591–603. (Cité page 20.)
- [Hue10] J. HUEBSCHMANN – « The sh-Lie algebra perturbation Lemma », *Forum Mathematicum* **23** (2010), no. 4, p. 669–691, arXiv :0710.2070 [math.AG]. (Cité page 38.)
- [Hue11] — , « The Lie Algebra Perturbation Lemma », *Higher Structures in Geometry and Physics* (A. S. Cattaneo, A. Giaquinto et P. Xu, éd.), Progress in Mathematics, vol. 287, Birkhäuser Boston, 2011, arXiv :0708.3977 [math.AG], p. 159–179 (English). (Cité pages 38 et 43.)
- [Jac62] N. JACOBSON – *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York, 1962. (Cité pages 48 et 86.)
- [KMS93] I. KOLÁŘ, P. W. MICHOR et J. SLOVÁK – *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, 1993. (Cité page 63.)
- [Kon03] M. KONTSEVITCH – « Deformation quantization of Poisson manifolds, I », *Letters of Mathematical Physics* **66**

- (2003), no. 3, p. 157–216. (Cité pages ix, 30, 32, 37 et 118.)
- [LV12] J.-L. LODAY et B. VALLETTE – *Algebraic Operads*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 346, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012. (Cité pages 6 et 18.)
- [Mak07] A. MAKHLOUF – « A comparison of deformations and geometric study of varieties of associative algebras », *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **2007** (2007), p. 24 pages, Article ID 18915.
- [ML63] S. MAC LANE – *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1963. (Cité pages 6 et 9.)
- [MR06] M. MARKL et E. REMM – « Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras », *Journal of Algebra* **299** (2006), no. 1, p. 171–189. (Cité page 104.)
- [MS08] A. MAKHLOUF et S. D. SILVESTROV – « Hom-algebra structures », *Journal of Generalized Lie Theory and Applications* **2** (2008), no. 2, p. 51–64. (Cité pages 83 et 104.)
- [MS10a] — , « Hom-Algebras and Hom-Coalgebras », *Journal of Algebra and its Applications* **9** (2010), no. 4, p. 553–589. (Cité pages xi, 87, 91 et 93.)
- [MS10b] — , « Notes on Formal deformations of Hom-associative and Hom-Lie algebras », *Forum Mathematicum* **22** (2010), no. 4, p. 715–739, arXiv :0712.3130v1 [math.RA]. (Cité pages xi, 79, 89, 113 et 115.)
- [NR66] A. NIJENHUIS et R. W. RICHARDSON – « Cohomology and deformations in graded Lie Algebras », *Bulletin of the American Mathematical Society* **72** (1966), p. 1–29. (Cité pages 17 et 21.)
- [OP11] S.-Q. OH et H.-M. PARK – « Duality of co-Poisson Hopf algebras », *Bulletin of the Korean Mathematical Society* **48** (2011), no. 1, p. 17–21. (Cité pages 107 et 110.)
- [ORTP10] G. ORTENZI, V. RUBTSOV et S. R. TAGNE PELAP – « On the Heisenberg invariance and the Elliptic Poisson tensors », arXiv :1001.4422 [math-ph], 2010. (Cité page 101.)
- [She11] Y. SHENG – « Representations of Hom-Lie algebras », *Algebras and Representation Theory* (2011), p. 1–18. (Cité page 96.)
- [SPAS09] S. D. SILVESTROV, E. PAAL, V. ABRAMOV et A. STOLIN (éds.) – « Generalized Lie theory in Mathema-

- tics, Physics and Beyond », ch. 17 : Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras, p. 189–206, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009, arXiv :0709.2413v2 [math.RA]. (Cité pages xi, 91 et 93.)
- [Swe69] M. E. SWEEDLER – *Hopf algebras*, W.A. Benjamin, Inc. Publishers, New York, 1969. (Cité page 92.)
- [VC03] N. VAN CHAU – « A Simple Proof of Jung’s Theorem on Polynomial Automorphisms of \mathbb{C}^2 », *Acta Mathematica Vietnamica* **28** (2003), no. 2, p. 209–214. (Cité page 122.)
- [Yau08] D. YAU – « Enveloping algebra of Hom-Lie algebras », *Journal of Generalized Lie Theory and Applications* **2** (2008), no. 2, p. 95–108. (Cité pages xi et 94.)
- [Yau09a] — , « The classical Hom-Yang-Baxter equation and Hom-Lie bialgebras », arXiv : 0905.1890v1 [math-ph], May 2009. (Cité pages 95, 96 et 97.)
- [Yau09b] — , « Hom-algebras and homology », *Journal of Lie Theory* **19** (2009), no. 2, p. 409–421, arXiv :0712.3515v3 [math.RA]. (Cité page 84.)
- [Yau10a] — , « Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras », *International Electronic Journal of Algebra* **8** (2010), p. 45–64. (Cité pages xi et 94.)
- [Yau10b] — , « Non-commutative Hom-Poisson algebras », arXiv :1010.3408v1 [math.RA], October 2010. (Cité pages 79, 85, 101 et 104.)
- [Yau11] — , « The Hom-Yang-Baxter equation and Hom-Lie algebras », *Journal of Mathematical Physics* **52** (2011), no. 5, p. 053502. (Cité pages xi et 130.)